9-17

**数学的問題解決**

**定義**

　数学的問題解決とは，数学の問題を解決することである．数学という用語には日本の小学校教科での算数も含まれる．問題とは，現在の状態（**初期状態**；initial state）と**目標状態**（goal state）との間に差異があり，問題状態を変化させて目標状態へと到達する必要のある状況のことである．問題状態を変化させる手段のことをオペレータと呼ぶ．問題解決とは，初期状態を目標状態へと遷移させるオペレータの系列を見つけ出すことである．数学の問題は，現在の問題状態において数学的に妥当な推論を行うことを繰り返して解決される．

**数学的問題解決の特徴**

　認知心理学（あるいは認知科学）での問題解決の研究は，パズルのような比較的単純な問題を用いて始まった．こうした問題では，解決に必要な知識は限定的である．初期状態，目標状態，オペレータは問題中で明示される．これらは大抵容易に理解でき，問題解決にあたって他の知識はほとんど必要とされない．

　これに対して，数学的問題解決では，数学領域での体系化された豊かな知識が必要となる．例えば，証明問題では，初期状態と目標状態は明示されているが，適切なオペレータは自分の持つ知識から検索する必要がある．これまでになされた数学的問題解決に関する研究の，認知心理学に対する重要な貢献のひとつは，問題解決における豊かな領域知識の役割を明らかにしたことにあるといってよい．

**問題の理解と解決の実行**

　一般に，問題解決過程は問題の理解と解決の実行という２つの下位過程によって理解できる（Newell & Simon, 1972）．問題理解の過程では，与えられた問題が解釈されて内的な**問題表象**（problem representation）が構築される．解決の実行では，構築された問題表象に基づいて，解決へと至るオペレータの系列が探索される．理解と解決の過程は，必ずしもこの順で逐次的に生じるのではなく，しばしば交互に働く．

　数学的問題解決においても，問題理解と解決実行の過程を区別することができる（Kintsch & Greeno, 1985; Polya, 1957; Riley, Greeno, & Heller, 1983）．例えば，算数文章題の解決過程は，文単位での意味を理解し，それらを統合して問題全体の表象を構築する理解過程と，問題解決のプランを立て，それを実行する解決過程を含む（Mayer, 1992）．

**問題スキーマ**

　数学の問題の理解過程では，**問題スキーマ**（problem schema）と呼ばれる知識が重要な役割を果たす．問題スキーマは，問題文に与えられた情報を組織化し，必要ならば明示的に与えられていない情報を補って，統合された問題表象を作り出すための，枠組みとなる知識である．問題スキーマは，そのスキーマが適用される問題のタイプに関する情報を含んでいる．例えば，方程式の文章題を「食塩水の問題」とか「仕事の問題」などとかカテゴリー化できるのは，問題文を読んで特定の問題スキーマが選択された結果である．問題スキーマがひとたび選択されると，スキーマが要求する情報が問題文から抽出され，問題表象が構築される．この過程はスキーマの**例示化**（instantiation）と呼ばれる．

**問題解決方略**

問題スキーマによって生成された問題表象は，問題要素間の関係を示しているので，問題解決のプランを立てるために利用できる．プランを立てるための知識を問題スキーマの一部と考えることもできるが，別の知識として区別されることも多い（Riley, Greeno, & Heller, 1983）．

　解決のプランをすぐに立てることができない難しい問題では，**問題解決方略**（problem-solving strategy）が必要となる．この知識は，「こういう問題条件ではこのような解決プランを試みよ」という，プロダクションルールとして表現することができる．Greeno (1978) は，幾何の問題を解くパーディックス（Perdix）というコンピュータ・プログラムを書き，幾何の問題解決に必要な問題解決方略を明らかにした．問題解決方略は，問題の解決を必ずしも保証しないが多くの場合に有効という意味を含んで，ヒューリスティック（heuristic）と呼ばれることもある（Schoenfeld, 1985）．

　なじみがなく理解の難しい問題では，問題理解のためにも方略あるいはヒューリスティックが必要となる．Polya（1957）は，問題解決のプロセスを，問題理解，プランの作成，プランの実行，解決のチェック，という４つの段階に分け，それぞれの段階において使用できるヒューリスティックを提示した。

**学習の転移**

　同一の問題カテゴリーに属する問題や，同一の問題解決方略が使用可能な問題の間では，**学習の転移**（transfer of learning）が生じうる．問題解決における学習の転移とは，ある問題（例題）で学習した知識を別の問題（転移課題）に適用して，その問題を解決することである．

　一般に，学習の転移は容易には成立しない．転移課題の解法が例題と僅かに異なるだけで，例題の学習効果は非常に小さくなってしまう（Reed, 1993）．現在の問題と類似した問題を思い出すことは重要な問題解決方略であるが（Polya, 1957; Schoenfeld, 1985），類推的な問題解決は簡単ではない（鈴木, 1996）．

**状況論**（situative perspective）および**学習科学**（learning sciences）からのアプローチにより，近年の転移研究は新しい展開を見せている．これについては，香川（2011）および白水（2012）を参照されたい．

**文献**

Greeno, J. G. (1978). A study of problem solving. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 1, pp. 13-75). Erlbaum. （山口修平・東洋訳，1985『問題解決の過程―幾何の課題による研究―』サイエンス社）

香川秀太 (2011). 状況論の拡大：状況的学習，文脈横断，そして共同体間の「境界」を問う議論へ．認知科学, **18**, 604-623.

Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review,* **92**, 109-129.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd Ed.). Freeman.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Prentice-Hall.

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd Ed.). Princeton University Press. （柿内賢信訳，1975『いかにして問題をとくか』丸善）

Reed, S. K. (1993). A schema-based theory of transfer. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp. 39-67). Ablex

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children’s problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

白水始 (2012). 認知科学と学習科学における知識の転移．人工知能学会誌, **27**, 347-358.

鈴木宏昭 (1996). 類似と思考．共立出版．

[寺尾　敦]