

3囚人問題はなぜ難しいのか

—ベイズの定理学習後の解答分析—

○寺尾敦¹・伊藤朋子^{2,3}

(¹青山学院大学社会情報学部・²日本学術振興会・³早稲田大学大学院教育学研究科)

ベイズの定理を適用する確率推論課題である「(変形) 3囚人問題」は、非常に難しく、しかも正解を納得しがたい。

一般に、これまでの確率推論の研究では、確率推論のスキルがそれほど高くないと思われるナイーブな参加者に対して、課題への解答を求めていた。このため、3囚人問題に正解できなかつたときに、ベイズの定理を用いることの一般的な難しさと、3囚人問題特有の難しさを区別できていない。

本研究では、ベイズの定理を学習した後での、3囚人問題への解答を分析する。このときには、3囚人問題はどれくらい難しいのか、なぜ難しいのか、を検討する。

方 法

参加者：青山学院大学社会情報学部での1年生必修科目「統計入門」の受講者のうち、本実験を行った2回の授業にいずれも出席した、62名のデータを分析した。

材料と手続き：確率についての学習が2回の授業にわたって行われた。1回目の授業では、ベイズの定理の「部品」である、条件つき確率、乗法定理、加法定理が講義された。2回目の授業ではベイズの定理が講義された。

1回目の授業の前後と、2回目の授業の終了後に、「くじびき課題」(表1)の解決を求めた。

2回目の授業の終了後には、くじびき課題に続いて、「3囚人問題」(表1)の解決を求めた。3囚人問題に取り組む時には、参加者は、樹形図を用いる樹形図群(30名)と、ルーレット図(Ichikawa, 1989)を用いるルーレット群(32名)に、ランダムに割り当てられた。最初に、事前分布のみが示された未完成の図が表示された。参加者は、10分を与えられ、図を完成させて解答を行うよう要求された。次に、完全な図が表示され、参加者はやはり10分間で解答を行った。樹形図とルーレット図はいずれも授業で学習した。

表1 くじびき課題と3囚人問題

くじびき課題：くじびき遊びをします。くじ袋の中には、白箱と黒箱がひとつずつ入っています。白箱の中には赤いボール2個と青いボール1個、黒箱の中には赤いボール1個と青いボール1個が入っています。箱もボールもそれぞれ同形同大で、触っただけでは区別できません。袋の中の箱もその中のボールもよく混ぜてから、袋の中を見ないで手をいれ、まず箱をひとつ選び、さらに、選んだ箱の中から、箱の中を見ないで手を入れボール(くじ)をひとつ選びます。取り出したボールが赤なら当たりで、青ならはずれです。いま、このくじびき遊びで、くじを引く人が当たりを引きました。このとき、その当たりくじが白箱から取ったボールである確率はいくらですか。

3囚人問題：3人の囚人A, B, Cがいて、2人が処刑され1人が釈放されることがわかっている。それぞれの釈放される確率は、1/4, 1/4, 1/2であった。だれが処刑されるか知っている看守に対し、囚人Aが、「BとCのうち、処刑される1人の名前を教えてくれないか」と頼んだ。看守はしばし考えて、まあかまわないだろうと思い、「Bは処刑されるよ」と教えてやった。この答えを聞いたあと、Aの釈放される確率はいくらになるか。ただし、看守はうそをつかないこと、囚人BとCがともに処刑される場合には1/2ずつの確率でBかCの名前を答えることを仮定する。

結 果

2回目の授業後の、2つの問題に対する解答を分析する。

くじびき課題での解答

くじびき課題の正答率は、樹形図群では36.7% (11名)、ルーレット群では25.0% (8名) であった。くじびき課題に對しては、どちらの群もまったく同一の条件で解答を行つていて、実際、両群の正答率の差は有意ではない ($\chi^2 = 0.99$, $p > .10$)。

最も多くみられた誤答は、白箱かつあたりの確率(1/3)である、「連言確率解」(伊藤, 2008, 2009)であった。樹形図群では7名、ルーレット群では8名がこの解答であった。

3囚人問題での解答

未完成な図を呈示された3囚人問題への最初のチャレンジでの正解者は、いずれの群でも一人もいなかった。樹形図群で多く見られた誤答としては、 $1/8 \div (1/8 + 1/4) = 1/3$ あるいは $1/4 \div (1/4 + 1/2) = 1/3$ という解答(後者の計算は「等比率解」と呼ばれる)が6名、 $1/8$ という解答(連言確率解)が5名であった。ルーレット群で多く見られた誤答としては、 $1/3$ という解答が7名、 $1/4$ という解答が6名であった。連言確率解(1/8)は2名であった。

完成した図を呈示された2回目のチャレンジでは、樹形図群で7名(23.3%)、ルーレット群で3名(9.4%)が正解(1/5)を与えた。両群の正答率の差は有意ではない ($\chi^2 = 2.23$, $p > .10$)。両群あわせて10名の正解者のうち、ルーレット群での1名を除く9名は、くじびき課題でも正解を与えていた。

くじびき課題正解者の3囚人問題での解答

樹形図群でのくじびき課題への正解者11名のうち7名が、3囚人問題への2回目のチャレンジで正解を与えた。ルーレット群では、くじびき課題への8名の正解者のうち2名が、3囚人問題への2回目のチャレンジで正解を与えた。

くじびき課題での正解者において、3囚人問題への1回目のチャレンジで最も多くみられた誤答は、 $1/8 \div (1/8 + 1/4) = 1/3$ あるいは $1/4 \div (1/4 + 1/2) = 1/3$ という解答であった。樹形図群は11名のうち4名が、ルーレット群では8名のうち3名がこの解答であった。連言確率解(1/8)は、樹形図群では1名で、ルーレット群では見られなかった。

3囚人問題への2回目のチャレンジで、樹形図群での不正解者(くじびき課題では正解)4名の解答は、 $1/3$ という解答が1名で、残りの3名はかなり混乱した解答あるいは無回答であった。ルーレット群での不正解者6名の解答は、 $1/3$ という解答が2名、 $1/8$ という連言確率解が2名、 $1/8 + 1/4 = 3/8$ という解答が2名であった。

考 察

ベイズの定理を用いる基本的な確率推定課題(くじびき課題)に正解するスキルを獲得し、完成した樹形図あるいはルーレット図が呈示されれば、3囚人問題での正答率はかなり高くなる。これまでの研究では、3囚人問題の正解率は非常に低く、正解者はほとんどいなかった。

ベイズの定理を用いる基本的なスキルがあつても、完全な図の援助なしでは3囚人問題に正解することはできない。この事実は、3囚人問題では正しい問題表象を構成することに大きな困難があることを示している。特に難しいのは、おそらく、尤度の理解であると思われる。