2009/12/23
サブゼミ
ＢＳモデル

離散から連続へ

（４）の式→（５）の式へ中心極限定理により BS 式に収束するわけ・・・

$$\underbrace{\exp(-\rho)}_{\text{現在価値に割引}}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p_n^k q^{n-k}\cdot f\left(100\exp\left(\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(2k-n)\right)\right)}_{\text{n 期間のオプションのペイオフをリスク中立測度で加重平均している}} \qquad （４）$$

（４）式からは以上が分かる。ただし、株価が行使価格を上回らない場合オプションのペイオフは０のため、オプションの価格は　　<u>f(x)＝max(St－K,0)</u>　　(6)　　で与えられる。

例・ｔ期のオプションの価格は？

ｔ期　　　　　　ｔ＋１期

100 → $100\exp\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$ ＞K　　オプションのペイオフ＝$g\left(100\exp\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)\right)$

100 → $100\exp\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$ ＜K　　オプションのペイオフ＝0

$$f(100)=\frac{1}{\exp(\rho/2)}\left(pg\left(100\exp\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)\right)+q\cdot 0\right)$$

$$g\left(100\exp\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)\right)=\left(100\exp\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)\right)-K=C$$

ここで、(6) 式を別の見方に変えてみます！t－1 期から t 期にかけて株の s 上がり、下がりを表す確率変数ζ_tを導入するのです。t 期の株価をS_tとすると、

$S_t=(1+\mu+\sigma\zeta_t)\cdot S_{t-1}$とし、ここで$\zeta_t$は{－1、1}の値をとる確立変数で、

ζ_t＝1 のとき、$1+\mu+\sigma$＝$\exp(\mu+\sigma)$

ζ_t=－1 のとき、$1+\mu+\sigma$＝$\exp(\mu-\sigma)$ である

ζ_t の定義

　不確実性を表す標本空間Ω

　　Ω＝｛uu…u,uu…d,uu…du,uu…dd,dd…u,dd…d｝　各要素を w_i　Ω＝｛ $w_1, w_2, w_3, \cdots, w_i$ ｝

u= $(\mu+\sigma)$,d= $(\mu-\sigma)$ つまり、すべて u ならすべて株価上昇することを表している

また、 $w_1 = uu\ldots u, w_2 = uu\ldots d, w_3 = uu\ldots du, \cdots, w_t = d\ldots d$

要素の個数は♯(Ω)＝ 2^T　　←2 項分布のため

$\zeta_1 = (uu...u) = (uu...d) = (u...) = 1, \zeta_1 = (d...) = -1$

$\zeta_{2t} = (uu...) = (du...) = 1, \zeta_2 = (ud...) = (dd...) = -1$

$\zeta_i = (i = 1,2,3,...,T)$　が定義できる

(3)式で考えると

まず、 $h(\zeta_{i\Delta t}, \zeta_{j\Delta t})$ ＝S　とする

$$C=\frac{1}{\exp(\rho/2)}(p^2 f(100\exp(\mu+\sqrt{2}\sigma)+2pqf(100\exp(\mu)+q^2 f(100\exp(\mu-\sqrt{2}\sigma))$$

$$=\frac{1}{\exp(\rho/2)}(p^2 f(100\exp(\mu+\sqrt{2}\sigma)+pqf(100\exp(\mu)+pqf(100\exp(\mu)+q^2 f(100\exp(\mu-\sqrt{2}\sigma))$$

$$=\frac{1}{\exp(\rho/2)}(p^2 h(1,1,)+pqh(1,-1)+pq(-1,1)+q^2 h(-1,-1))$$

以上より株価過程は 1 次元非対称ランダムウォーク Z_t 、すなわち、

$Z_t = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + ... + \zeta_t$　で書き表せる

$S_{t+1} = (1+\mu+\sigma\zeta_{t+1})S_t$ のほうの時間の幅 Δt を小さくする　μ_t の代わりに $\mu\,\Delta t, \sigma$ の代わりに $\sigma\sqrt{\Delta t}_t$ ととると

$S_{t+\Delta t} = (1+\mu\Delta t+\sigma\zeta_{t+\Delta t})S_t$　となり、 $S_0 = S$ のとき

$S_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} \times \frac{S_{t-1}}{S_{t-2}} \times \cdots \times \frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_1}{S_0} \times S_0 = S\prod_{i=1}^{t}(1+\mu+\sigma\zeta_i)$　より

$S_{t+\Delta t} = (1+\mu\Delta t+\sigma\zeta_{t+\Delta t})S_t = S\prod_{i=1}^{t}(1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{t}\zeta_{i\Delta t})$ となります

ただし、 $\prod_{i=1}^{t} a_i = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_i$ である

$$S\prod_{i=1}^{t}(1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{t}\zeta_{i\Delta t}) = S\prod_{i=1}^{t}(1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{t})\left(\frac{1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{t}}{1+\mu\Delta t-\sigma\sqrt{t}}\right)^{\zeta_{\Delta t}}$$

$$= S\prod_{i=1}^{t}((1+\mu\Delta t)^2-\sigma^2 t))^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{t}}{1+\mu\Delta t-\sigma\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{2}\zeta_{\Delta t}}$$

$$= S\underbrace{(1+\mu\Delta t)^2-\sigma^2 t))^{\frac{n}{2}}}_{②}\underbrace{\left(\frac{1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{t}}{1+\mu\Delta t-\sigma\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{2}(\zeta_{\Delta t}+\zeta_{2\Delta t}+\zeta_{3\Delta t}+\cdots+\zeta_{n\Delta t})}}_{③} \quad ・・・①$$

①　②をそれぞれを$\Delta t\to 0$、つまり$n\to\infty$とすると

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Big(\ (1+\mu\Delta t)^2-\sigma^2 t))^{\frac{T}{2\Delta t}} = e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T} \quad ・・・②$$

次に$\lim_{\Delta t}\left(\frac{1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{t}}{1+\mu\Delta t-\sigma\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{2}(\zeta_{\Delta t}+\zeta_{2\Delta t}+\zeta_{3\Delta t}+\cdots+\zeta_{n\Delta t})}$なのですが・・・

ここで、ζ_tは{−1、1}の値をとる確立変数であるが、

Ｑ｛−1、1}は一体どのように決まるのか？

Ａ　２項モデルなのでリスク中立測度です！

そこでリスク中立測度Ｑを用いると、

$Q(\zeta_i=1)=p=\underbrace{\frac{r-\mu+\sigma}{2\sigma}}$　　　　$Q(\zeta_i=-1)=1-p=q=\underbrace{\frac{-r+\mu+\sigma}{2\sigma}}$

リスク中立測度の上昇率をu＝$\mu+\sigma$,下落率をｄ＝$\mu-\sigma$と置き換え

$$\therefore E(\zeta_{i\Delta t})=\frac{r-\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}=1\times p+(-1)\times q$$

$$\begin{aligned} v(\zeta_{i\Delta t}) &= E(\zeta_{i\Delta t}-E(\zeta_{i\Delta t}))^2 \\ &= E(\zeta_{i\Delta t}^2-2E(\zeta_{i\Delta t})\zeta_{i\Delta t}+(E(\zeta_{i\Delta t}))^2) \\ &= E(\zeta_{i\Delta t})^2-2(E(\zeta_{i\Delta t}))^2+(E(\zeta_{i\Delta t}))^2 \\ &= E((\zeta_{i\Delta t})^2)-(E(\zeta_{i\Delta t}))^2 \end{aligned} = 1-\left(\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2\sqrt{\Delta t}\right)^2$$

今、$\zeta_{i\Delta t}$の期待値と、分散を求めました　１次元非対称ランダムウォークZ_tの期待値と、分散はこれをn倍してあげればよい

これらを使い

$\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\dots+\zeta_t$ の標準化＝ $\dfrac{\zeta_{\Delta t}+\zeta_{2\Delta t}+\zeta_{3\Delta t}+\dots+\zeta_{n\Delta t}-E(\zeta_{\Delta t}+\zeta_{2\Delta t}+\zeta_{3\Delta t})}{\sqrt{V(\zeta_{\Delta t}+\zeta_{2\Delta t}+\zeta_{3\Delta t}+\dots+\zeta_{n\Delta t})}}$

$$=\frac{\zeta_{\Delta t}+\zeta_{2\Delta t}+\zeta_{3\Delta t}+\dots+\zeta_{n\Delta t}-\frac{r-\mu}{\sigma}n\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{n(1-(\frac{r-\mu}{\sigma})^2\sqrt{\Delta t})}}$$

$\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}$ N(0,1) $=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2}}$ ※中心極限定理

両辺を $\sqrt{n(1-(\frac{r-\mu}{\sigma})^2\sqrt{\Delta t})}$ 倍して、$+\dfrac{r-\mu}{\sigma}n\sqrt{\Delta t}$ だけ加えると

$\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\dots+\zeta_t \sim \sqrt{n(1-(\frac{r-\mu}{\sigma})^2\sqrt{\Delta t})}$ N(0,1) $+\dfrac{r-\mu}{\sigma}n\sqrt{\Delta t}$

さらに $n=\dfrac{T}{\Delta t}$ より

$$\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\dots+\zeta_t \sim \sqrt{\frac{T}{\Delta t}}\sqrt{1-(\frac{r-\mu}{\sigma})^2\sqrt{\Delta t}}\,N(0,1)+\frac{r-\mu}{\sigma}\frac{T}{\sqrt{\Delta t}}$$

$$\therefore \lim_{\Delta t}\left(\frac{1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{t}}{1+\mu\Delta t-\sigma\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{2}(\zeta_{\Delta t}+\zeta_{2\Delta t}+\zeta_{3\Delta t}+\cdots+\zeta_{n\Delta t})}$$

$$=\lim_{\Delta t}(1+2\sigma\sqrt{\Delta t})^{\frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}\times\sqrt{\Delta t}(\zeta_{\Delta t}+\zeta_{2\Delta t}+\zeta_{3\Delta t}+\cdots+\zeta_{n\Delta t})}=e^{\sigma(\sqrt{T}N(0,1)+\frac{r-\mu}{\sigma}T)} \quad ・・・③$$

e の関数に乗るわけ

$$e^x=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^{nT}=\lim_{n\to 0}(1+xn)^{\frac{T}{n}}=e^{xT}$$

$x=1, T=1$ のとき $e^x=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n\times 1}=\lim_{n\to 0}(1+1\times n)^{\frac{1}{n}}=e^{1\times 1}=e$

① ＝S(②・③)より

S($e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T}$ ・ $e^{\sigma(\sqrt{T}N(0,1)+\frac{r-\mu}{\sigma}T)}$)$=S(e^{\mu T-\frac{\sigma^2}{2}T}\cdot e^{\sigma(\sqrt{T}N(0,1))+\frac{r-\mu}{\sigma}T\times\sigma})=Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}N(0,1)}$

と、株価過程が対数正規分布に乗ることがわかる！

2009/12/23
サブゼミ
ＢＳモデル

この株価をリスクフリーレートの複利で割り引けば

↓

$$(1+r\Delta T)^{\frac{T}{\Delta t}} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} e^{rt}$$

満期時のペイオフが $f(S_T)$ と表されるデリバティブの t＝0 における価格 C は・・・・・・・・・

$$C = E(e^{-rt} f(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}N(0,1)}))$$

これを解けばブラックショールズ価格式になります！！！！！！

では、始めます

満期 T,行使価格 K のコールオプションの t=0 における価格 C は、このコールオプションの T 期のペイオフ、max（$S_T - K, 0$）なので、

$$C = E(e^{-rT}\max(S_T - K, 0))$$

$$= e^{-rT}\ E(\max(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}N(0,1)} - K, 0))$$ ←定数 e^{-rT} を前に出す

$$= e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x} - K, 0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$ ←正規分布曲線のＸに乗る　$e^{N(1,0)} = x$

$$N(1,0) = \log x$$

また、連続型の期待値は積分によって求められる

$$= e^{-rT}\int_{\frac{\log\frac{K}{S}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty}(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x} - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$ ← i

$$= \frac{S}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log\frac{K}{S}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty}e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x}e^{-rT}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx - \frac{Ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log\frac{K}{S}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$ ←()を外す、指数関数の法則

$$= \frac{S}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log\frac{K}{S}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2\sigma\sqrt{t}x+\sigma^2t)}dx - \frac{Ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log\frac{K}{S}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$= \frac{S}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log\frac{K}{S}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{t})^2}dx - \frac{Ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log\frac{K}{S}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$ ←$x-\sigma\sqrt{t}$ ＝u とおくと

$$= \frac{S}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log\frac{K}{S}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}du - \frac{Ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log\frac{K}{S}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$ ←$x-\sigma\sqrt{t}$＝u を両辺微分　$1-0=\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}, du = dx$

$$= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log\frac{S}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du - \frac{Ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log\frac{S}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$ ←標準正規分布の性質　ⅱ

$$= S\Phi(\frac{\log\frac{S}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}) - Ke^{-rT}\Phi(\frac{\log\frac{S}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}})$$ ←$\Phi(x) = P(N(0.1) \le x)$

$$y = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= S\Phi(\frac{\log\frac{S}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}) - Ke^{-rT}\Phi(\frac{\log\frac{S}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}})$$ ← $\frac{\log\frac{S}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ ＝d1, d1－$\sigma\sqrt{T}$ ＝d2

$$= S\Phi(d1) - Ke^{-rT}\Phi(d2)$$

↑

見たことあるべ!!だってこれがＢ・Ｓ式!!!!

上の展開式のⅰⅱで何がおきているのか？

ⅰ　$Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x} - K$ ＞0 のときオプションのペイオフが発生

$Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x} > K$　両辺の対数を取る

$\log Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x} > \log K$　以下対数の法則　移行など

$$\log S + \log e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x} > \log K$$

$$(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}x > \log\frac{K}{S}$$

$$\sigma\sqrt{T}x > \log\frac{K}{S} - (r-\frac{\sigma^2}{2})T$$

$$x > \frac{\log\frac{K}{S} - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

つまり、x は $\frac{\log\frac{K}{S} - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ 以上のとき株価が行使価格を超える

そのときの確立を$\dfrac{\log\dfrac{K}{S}-(r-\dfrac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$→＋∞の範囲で定積分することで割り出している

また、正規分布は平均値で左右対称だから、以下の関係が成り立つ　　ii

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{-a} f(x)dx$$

以下に、標準正規分布とは？中心極限定理で本当に 2 項分布は標準分布になるの？ に答えます

標準正規分布とは？
N(0,1)とは平均が 0、分散が 1 の正規分布（標準正規分布）
正規分布とは以下のような性質を持つ関数（y＝$f(x)$）

正規分布曲線＝$y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ ただし、平均をm、分散をσ²、m、σは定数でσ>0 とする

平均が 0、分散が 1 のとき $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\rightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2}}$

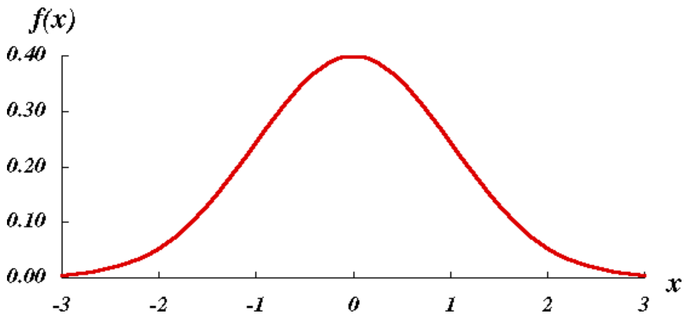
(1) $f(m-\alpha)=f(m+\alpha)$　　ただしαは任意の定数
　これはyは$x=m$について線対称

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$　　$y=f(x)$の漸近線が x 軸($y=0$)

(3) $y=f(x)$は任意の x で常に正、また$x=m$で max　$y=f(m)=y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$をとる

　$x-m=m-m=0$となり$e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=e^{-0}=\dfrac{1}{e^0}=\dfrac{1}{1}=1$

(4) $x>m$で単調減少
(5)曲線$y=f(x)$と x 軸との間の部分の面積は 1 である



つまり、$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

中心極限定理よって二項分布が正規分布に収束するイメージ

⑴ 二項定理$(a+b)^n$の展開式

$(a+b)^0$　　0

$(a+b)^1$　　1　1　　　↙=p　↘=q

$(a+b)^2$　　1　2　1

$(a+b)^3$　　1　3　3　1　　　←二項ツリー

$(a+b)^4$　　1　4　6　4　1

↓　　　　↓

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + + {}_nC_3a^{n-3}b^3 + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_ra^{n-r}b^r$$

ただし、${}_nC_r = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{r!}$　また、${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$

⑴見て分かるとおり、偶数乗のときは中央 1 項、奇数乗のときに中央 2 項あって、左右対称

⑵株価が 0 になることは無く、どんなに確立が低くても w_1 w_t は起こりうる　つまり、$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

⑶2 項ツリーを見れば明らか

⑷平均値から離れることで($w_m \to w_t$)その起こりうる確率は低くなるため

⑸ Ω＝｛$w_1, w_2, w_3, \cdots, w_i$｝に対し、$w_i$ が起こりうる確率${}_nC_rp^{n-r}q^r$の合計が 1

標準化$\dfrac{X-\mu}{\sigma}$とは、

　簡単に説明すると

先の正規分布の性質⑴～⑸を満たす関数$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$があります

※$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$を変形して x ＝･･･−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ･･･とデータを取ると、x =0 で線対称、x >0 で y は単調減少がわかる　また、0 で極大かつ最大で x 軸が漸近線

$y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ をｘ軸方向にσ倍して、μ だけ平行移動した座標をＸとすると、$X=\sigma x+\mu$　x＝$\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ となります

例・偏差値

偏差値の求め方　$50+10x=50+10\dfrac{X-\mu}{\sigma}$　　ただし、偏差値では平均が 50、分散が 100(標準偏差 10)

平均が 35 点分散が 20 のテストをあなたが受けたら、６０点でした 、そのときのあなたの偏差値は

$$50+\frac{60-35}{20}=62.5$$ となります

また、$y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \xrightarrow[\frac{X-\mu}{\sigma}=u]{} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2}}$

これを $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ に代入すると $y=e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ となり、この関数とｘ軸とで囲まれた部分の面積Ｓが無限定積分

$\int_{-\infty}^{\infty}ce^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=1$ とおいて、定数ｃを決めると（n=無限で、ｘ軸が漸近線)、ｃ＝$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ となるので(ここは聞かないで；；)

$y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ が与えられる

詳しくは本論とずれるのと、高度な専門的数学的知識が必要なため省略させて頂きます・・・標準化された標本が正規分布に従うとき、任意の標本ｘに対して $0\le\zeta_{i\Delta t}\le$ ｘに属する確立が P($0\le\zeta_{i\Delta t}\le$ ｘ)＝

$y=\int_0^X\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ の値にのせたものになります

この分布関数 $f(x)$ を区間（a, b）において連続な関数として定積分、$\int_a^b f(x)dx=f(b)-f(a)$ すると面積（ｘ軸との間の部分の面積）＝１

ただし、標本数は∞のとき

$$y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

さて、前述の通り標準化とは標本Ｘが対応する分布関数のどの位置にあるのかが分かるようになっています　つまり、標準化された標本の標本数が∞で連続ならどのような分布でもある条件を満たせば標準正規分布になるの

です

　ある条件とは分布によって異なる複数あるが、今回は$Z_t = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_t$ が対象ランダムウォークとなるようにリスク中立測度 Q＝$\lim_{n\to\infty} p \to \frac{1}{2}$とするとよいから、

$p = \frac{r-d}{u-d} = \frac{(1+r)^{\frac{t}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}$ は$n \to \infty$のときどの指数も 0 となり、分子、分母が 0(不定形)

よってロピタルの定理を利用すると

$$\partial p = \frac{\partial_n \left\{ (1+r)^{\frac{t}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} \right\}}{\partial_n \left\{ e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} \right\}} = \frac{(1+r)^{\frac{t}{n}}(-tn^{-2})\log(1+r) - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}(\sigma\sqrt{t})(-\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}})}{(\sigma\sqrt{t})(-\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}})\left\{ e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} \right\}}$$

$$= \frac{(1+r)^{\frac{t}{n}}(-tn^{-2})\log(1+r) - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}(\sigma\sqrt{t})(-\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}})}{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}(\sigma\sqrt{t})(-\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}}) - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}(\sigma\sqrt{t})(-\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}})}$$

$$= \frac{(\sigma\sqrt{t})(\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}})\left\{ (\sigma\sqrt{t})^{-1}2n^{\frac{3}{2}}(1+r)^{\frac{t}{n}}(-tn^{-2})\log(1+r) - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} \right\}}{(\sigma\sqrt{t})(-\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}})\left\{ e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} + e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} \right\}}$$

$$= \frac{(\sigma\sqrt{t})^{-1}2n^{\frac{3}{2}}(1+r)^{\frac{t}{n}}(-tn^{-2})\log(1+r) - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{-\left\{ e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} + e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} \right\}}$$

ここで$n \to \infty$とすると、上式は

$$\to \frac{0-1}{-(1+1)} = \frac{1}{2}$$

よって $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{n}}(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma})$ としても良いことが分かる

ロリピタルの定理とは

分数関数などがその極限値を不定形$\left(\frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \cdots\right)$等与えられたなら、割り算の定義反し、真の値が分からなくなる。

しかし、分子と分母を微分してもその極限値が変わらないことを示した定理。(偏微分も可)

以上のような曲線に中心極限定理で２項分布は表されます

d1、d2 って？誤魔化したとこをここでやります

また、になりますがここに新しくオプションのペイオフ $f(x)$ ＝max($S_T - K, 0$)を考えます

ここでは株価を($S = S_0 u^a d^{n-a}$)とします　　　つまり二項モデルです

２項モデルのオプション価格公式

$$e^{-rT}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{1-k} \times f(\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(2k-n))$$

↓

$$= \frac{1}{r^n}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} \times (Su^k d^{n-k} - K)$$

$$= \frac{1}{r^n}\sum_{k=a}^{n} {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \times (Su^k d^{n-k} - K)$$

$$= S\sum_{k=a}^{n} {}_nC_k (\frac{up}{r})^n (\frac{d(1-p)}{r})^{n-k} - \frac{k}{r^n}\sum_{i=a}^{n} {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$$

ここで、$\frac{up}{r} = p'$ とおくと $\frac{d(1-p)}{r} = \frac{d(u-r)}{r(u-d)} = \frac{du - dr + ru - ru}{r(u-d)} = \frac{r(u-d) + du - ru}{r(u-d)}$

$$= 1 - \frac{u(r-d)}{r(u-d)} = 1 - \frac{up}{r} = 1 - p'$$

←いろいろいじったがリスク中立測度は変わらず

以上から、二項モデルにおける n 期間のオプション価格式は次の通り

$$C = SB_a(n, p') - \frac{k}{r^n} B_a(n, p)$$

ただし、$B_a(n, p') = \sum_{k=a}^{n} {}_nC_k p'^k (1-p')^{n-k},\ p = \frac{r-d}{u-d},\ p' = \frac{up}{r}$

今までは p と q がそれぞれどの程度とるかを原千秋先生のプリントに合わせて K 表現していたが、行使価格 K と被るため以下 a に置き換える

このとき $S_0 u^a d^{n-a} - K > 0$ を満たす最小の正整数 a は

$$a = \left[\frac{\log \frac{K}{Sd^n}}{\log \frac{u}{d}}\right] + 1 \quad \ldots a$$

ただし[　]内はガウス記号（[ｘ]はｘを超えない最大整数　　例・[３．５]＝３）

$S_0 u^a d^{n-a}$ ＞K の両辺の自然対数をとり　$\log S_0 u^a d^{n-a}$ ＞logK

対数の公式より

$$\log S_0 + a\log u + (n-a)\log d > \log K$$

$$\log S_0 + a\log u + n\log d - a\log d > \log K$$

$$\log S_0 d^n + a\log\frac{u}{d} > \log K$$

$$a > \frac{\log\frac{K}{Sd^n}}{\log\frac{u}{d}}$$ この時インザマネー！

$a = \dfrac{\log\frac{K}{Sd^n}}{\log\frac{u}{d}}$ のとき、2 項分布ではオプションのペイオフが 0 の場合があるため a 式になる

二項モデルと B・S 式の比較

二項モデル　$C = SB_a(n, p') - Kr^{-n}B_a(n, p)$

↓ n→無限（中心極限定理）

B・S 式　C= $S\Phi(d1) - Ke^{-rT}\Phi(d2)$

ぱっと見 $B_a(n, p') \to \Phi(d1)$

$B_a(n, p) \to \Phi(d2)$

$r^{-n} \to e^{-rT}$

となることを示せばよさそう

$r^n \to e^{-rT}$ はすでに明らか

さて、$B_a(n, p) \to \Phi(d2) = \Phi(d1 - \sigma\sqrt{t})$ と $B_a(n, p') \to \Phi(d1)$

は証明方法が同じもののため、以下に $B_a(n, p) \to \Phi(d1 - \sigma\sqrt{t})$ を証明する

また上式は次式と同値である

$$1 - B_a(n, p) = 1 - \Phi(d1 - \sigma\sqrt{t}) = \Phi(\sigma\sqrt{t} - d1)$$

よって、以下

$$1-B_a(n,p)=\Phi(\sigma\sqrt{t}-d1)$$

の証明が目標となる

ここで先の $S=S_0u^ad^{n-a}$ における a の平均と分散は（二項分布の）

$E(a)=np$　p は上昇する確率を表すことに注意

$$=\sum_{k=0}^{n}k\,{}_nC_k\,p^kq^{n-k}$$

$$=0+\sum_{k=1}^{n}k\,{}_nC_k\,p^kq^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n}{k}\,{}_{n-1}C_{k-1}\,p^kq^{n-k}$$

$\leftarrow$　${}_nC_k=\frac{n}{k}\,{}_{n-1}C_{k-1}$　つまり $\frac{k}{n}\,{}_nC_k=\frac{k}{n}\times\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$

$$=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}={}_{n-1}C_{k-1}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}C_{k-1}\,p^{k-1}q^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}C_k\,p^kq^{n-1-k}$$

$$=np(p+q)^{n-1}$$

$$=np$$

$V(a)=np(1-p)$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2\,{}_nC_k\,p^kq^{n-k}$$

$$=0+\sum_{k=1}^{n}k^2\,{}_nC_k\,p^aq^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2\frac{n}{k}\,{}_{n-1}C_{k-1}\,p^aq^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}k\,{}_{n-1}C_{k-1}\,p^{k-1}q^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,{}_{n-1}C_k\,p^kq^{n-k-1}$$

$$=np\ \ \{\sum_{k=0}^{n-1}k\,{}_{n-1}C_{k-1}\,p^{k-1}q^{n-k}+\sum_{k=0}^{n-1}C_{k-1}\,p^kq^{n-k-1}$$

$= np\ \{(n-1)p + (p+q)^{n-1}\}$

$= np\{(n-1)p + 1\}$

$= n(n-1)p^2 + np$

以上を用いて

$V(a) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

$= -np^2 + np$

$= np(1-p) = npq$

となる

㊟２項分布の分散が分かりにくい方には…

$V(a) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

$= E(X(X-1)) + E(X) - \{E(X)\}^2$

$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$

$= np(1-p) = npq$

以上を利用してａの標準化

$$\frac{a-1-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$= \frac{\dfrac{\log\dfrac{k}{Sd^n}}{\log\dfrac{u}{d}} + \varepsilon - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\log\dfrac{k}{S} - n\log d - \varepsilon\log\dfrac{u}{d}\, np\log\dfrac{u}{d}}{\sqrt{np(1-p)}\log\dfrac{u}{d}} = \frac{\log\dfrac{k}{S} - n(p\log\dfrac{u}{d} + \log d) - \varepsilon\log\dfrac{u}{d}}{\sqrt{np(1-p)}\log\dfrac{u}{d}} \quad \cdots b$$

ここで$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{n}}\left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)$より

ｂ式の分子の第二項

$$n(p\log\frac{u}{d}+\log d)=np(2\log u)+n\log u=\log u(2np-n)=\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\left\{2n\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{n}}\left(\frac{r-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\right]-n\right\}$$

$$=\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\left\{n+\sqrt{nt}\left(\frac{r-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)-n\right\}=(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t$$

ｂ式の分母

$$\sqrt{np(1-p)}\log\frac{u}{d}=\sqrt{np(1-p)}\,2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}=2\sigma\sqrt{p(1-p)t}$$

ロピタルの定理→ $=2\sigma\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}t}=\sigma\sqrt{t}$

$$\log\frac{u}{d}=2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\to 0 \qquad n\to\infty$$

よって $\frac{a-1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\to\frac{\log\frac{K}{S}-(r-\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}=-(\frac{\log\frac{S}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}-\sigma\sqrt{t})$

$$=\sigma\sqrt{t}-d_1$$

これですべての証明が終了！！！