まずは確率過程のおはなし

・確率過程とはあるｔ期の値（X_t）が確率的に決まるときＸの集合を確率過程と言う

└確率変数

・離散時間の確率過程よ連続時間の確率過程がある

例）ランダムウォーク：硬貨を投げて表が出たら＋１、裏が出たら－１をとる場合

現在の点数（Z）の集合

連続的に観測した気温

連続的に観測した株価

○確率過程の性質

マルコフ過程：X_{t+1}の値は過去の履歴によらず現時点の値（X_t）にのみ影響をうける

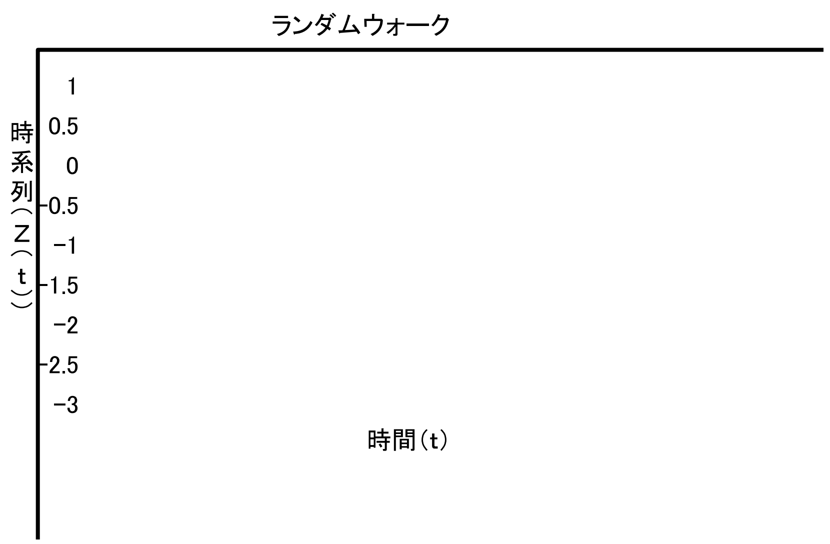
二項ツリーをみるとわかりやすい

マルチンゲール：確率変数の期待値（平均値）は現時点（初期値）の期待値と等しい

$E(X_t)=x$、$X_{t+1}=x\pm a$　で確率$\frac{1}{2}$であるならば$E[X_{t+1}]=x$

次に確率過程の代表例、ランダムウォークについて

いきなり連続的な株価の確率過程を考えるのではなく、一般的な確率過程で株価の動きを表せられないかを考える



時点　t_0、t_1、t_2、t_3　‥　t_{n-1}、t_n　のときそれぞれ

時系列　Z（t_0）、Z（t_1）、Z（t_2）　‥　Z（t_{n-1}）、Z（t_n）　に対応。

上図のランダムウォークZ_t（離散的）は期間を１００分割したものだがΔｔ→０にすると、ランダムウォークZ_t(連続的)になる

∴ランダムウォークの極限はウィーナー過程（ブラウン運動）

次のような性質を満たすとき、ランダムウォークはウィーナー過程と呼ばれる

１．確率１（１００％）でＺ（t_0）＝０

２．時系列の変化量ΔZ（Z（t）—Z（s））は（s<t）

平均０、分散ｔ−ｓ＝Δｔをとる正規分布に従う

３．Z_0、Z_1-Z_0、Z_2-Z_1、Z_3-Z_2…はそれぞれ独立増分（マルコフ性）で、定常増分

４．ｔに関する連続関数である

１～４よりウィーナー過程の性質は

・増分の分布

・マルコフ性

・マルチンゲール性　　←正規分布に従う

・微分不可能性　　　　などがあげられる

↓

連続なのになぜ微分不可能？

証明するのは難しいので直感的に説明すると、微分の定義に従って導関数を求めると不定形になってしまうためである

つまり、$\lim_{h\to 0}\frac{B_{t+h}-B_t}{h}$が存在しないことを示す

$B_{t+h}-B_t$の分布＝B_hの分布＝N(0,h)

したがって、$B_{t+h}-B_t$の標準偏差は$\sqrt{h}$であるから$B_{t+h}-B_t$は$O(\sqrt{h})$程度の増加量である

よって、

$$\frac{B_{t+h}-B_t}{h}=\frac{O(\sqrt{h})}{h}=O(\frac{1}{\sqrt{h}})\to\infty \qquad h\to 0$$

ここではΔZはＮ（０、Δｔ）の正規分布に従い標準正規分布、Ｎ（０，１）に$\sqrt{\Delta t}$倍したものなので

ΔZ～$\sqrt{\Delta t}$・Ｎ（０，１）　と表せる

このウィーナー過程を数式の形で一般化させると

Δｔ→０のとき一般化したウィーナー過程は

ｄＸ＝α・ｄｔ＋ｂ・ｄＺ

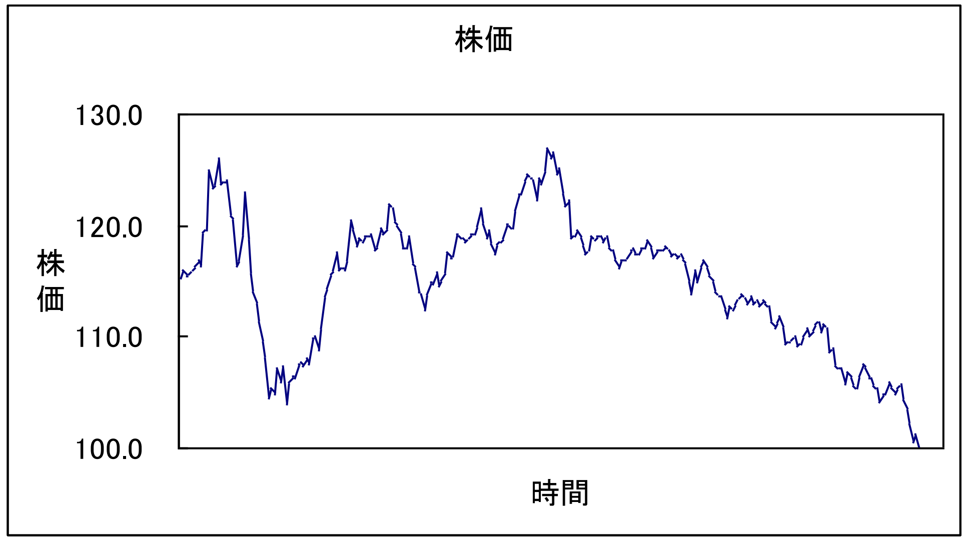
Ｘはウィーナー過程に従っているので

ΔXは平均α・Δt、分散（b・$\sqrt{\Delta t}$）^{2}の正規分布に従っている

ウィーナー過程を一般化するのは１次関数（y＝cx＋e）を一般化するのと考え方は同じ

	ウィーナー過程	１次関数
基準	標準正規分布（N（0、1））	y＝x
定数	α・dt（左右にシフト）←平均の変化	e（上下にシフト）
傾き	b　←　分散の変化	c

株価の動きをモデル化しよう！



なんとなくランダムウォークっぽい気が…
数式として一致すれば株価をウィーナー過程で表せられる

株価リターンを式で表す

$$\frac{dX}{X} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dZ$$

μ：期待収益率
σ：分散
X：株価

両辺にXをかけると

$$dX = \underbrace{\mu X}_{a(X,\ t)} \cdot dt + \underbrace{\sigma X}_{b(X,\ t)} \cdot dZ$$

dX＝a（X，t）・dt＋b（X，t）・dZ）　―　伊藤過程

ウィーナー過程の一般式と同じ

∴株価の動きは一般化したウィーナー過程と同じ動きをする

（ウィーナー過程のa，bをそれぞれ上の式のようにa（X，t），b（X，t）の関数に置き換えたものを伊藤過程と呼ぶ）

○伊藤のレンマの導出

関数f（X，t）の変化量Δfは２変数関数のテイラー展開（5，6ページで説明）を利用する（株価（X）の影響を受ける関数なのでオプションを表す関数と考える）と、

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial X}\cdot \Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\cdot (\Delta X)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial t}\cdot \Delta X \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot (\Delta t)^2 + \cdots$$

と表せる

ここでXが伊藤過程に従っているのでΔXのところに

a（X，t）・Δt＋b（X，t）・ΔZ　　を代入する

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial X}\{a(X,\ t)\cdot \Delta t + b(X,\ t)\cdot \Delta Z\} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot \Delta t$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\{a(X,\ t)\cdot \Delta t + b(X,\ t)\cdot \Delta Z\}^2$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial t}\{a(X,\ t)\cdot \Delta t + b(X,\ t)\Delta Z\}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot (\Delta t)^2 + \ldots$$

したがって

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial X} a(X,\ t)\cdot \Delta t + \frac{\partial f}{\partial X} b(X,\ t)\cdot \Delta Z + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot \Delta t$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\{a(X,\ t)\}^2\cdot \Delta t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\{b(X,\ t)\}^2\cdot (\Delta Z)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\cdot 2\cdot a(X,\ t)\cdot b(X,\ t)\cdot \Delta t\cdot \Delta Z$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial X\cdot \partial t} a(X,\ t)\cdot (\Delta t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial t} b(X,\ t)\cdot \Delta t\cdot \Delta Z$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot (\Delta t)^2 + \cdots$$

※標準正規分布とカイ２乗分布の性質　←　上の式をすっきりさせてくれる

Xが標準正規分布N（0，1）に従うとき

X^2は平均1、分散2の

標準正規分布の分散と同値

この性質を使ってΔZを変換してみる

その前に（ΔZ）^{2}の平均と分散を求める

$$E\{(\Delta Z)^2\} = E\{(N(0,1))^2 \cdot (\sqrt{\Delta t})^2\}$$

$$= \Delta t \cdot E\{(N(0,1))^2\}$$

カイ２乗分布の平均＝１

$$= \Delta t$$

$$Var\{(\Delta Z)^2\} = Var\{(N(0,1))^2 \cdot (\sqrt{\Delta t})^2\}$$

$$= (\Delta t)^2 \cdot Var\{(N(0,1))^2$$

カイ２乗分布の平均＝２

$$= 2 \cdot (\Delta t)^2$$

∴（ΔZ）^{2}は平均Δt、分散２・（Δt）^{2}の正規分布に従う

ここでΔt→0とすると

（Δt）^{2}はΔtよりもさらに0に近づくので

（Δt）^{2}＝0　となり（ΔZ）^{2}の分散は0（つまりばらつきがなくなる）

つまり（ΔZ）^{2}の値は平均Δtに等しくなる

Δt→0のとき

$$(dZ)^2 = dt$$

つまり　$dZ = \sqrt{dt}$　と表せる

Δt→0としたとき

$\Delta t \to dt$　、　$\Delta Z \to dZ\ (=\sqrt{\Delta t})$　、　$\Delta f \to df$

$(\Delta t)^2 \to 0$　、　$\Delta t \cdot \Delta Z\ (=\sqrt{\Delta t}^3) \to 0$

にそれぞれ置き換えると

$$df = \frac{\partial f}{\partial X} \cdot a(X,t) \cdot dt + \frac{\partial f}{\partial X} \cdot b(X,t) \cdot dZ + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \cdot \{b(X,t)\}^2 \cdot dt$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial X} \cdot a(X,t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \cdot \{b(X,t)\}^2\right] \cdot dt + \frac{\partial f}{\partial X} \cdot b(X,t) \cdot d$$

伊藤のレンマ（公式）

テイラー展開（マクローリン展開）って？

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 \cdots$$

例）　$f(x) = 7x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 3x + 8$　　　$f(0) = 8$

$f'(x) = 28x^3 - 33x^2 + 10x - 3$　　　$f'(0) = -3$

$f''(x) = 84x^2 - 66x + 10$　　　$f''(0) = 10\ (= 5 \cdot 2!)$

$f'''(x) = 168x - 66$　　　$f'''(0) = -66\ (= -11 \cdot 3!)$

$f^{(4)}(x) = 168$　　　$f^{(4)}(0) = 168\ (= 7 \cdot 4!)$

$f^{(5)}(x) = 0$　　　$f^{(5)}(0) = 0$

この数値をテイラー展開に代入すると

$$f(x) = 8 - 3x + 5x^2 - 11x^3 + 7x^4$$

となり元の式と同じになる

つぎに２変数関数の場合を考える

関数f（x，y）が点（a，b）のまわりで何回も偏微分可能ならば

$$f(a+h, b+k) = f(a, b)$$

$$+ \frac{1}{1!}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (a+h-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (b+k-b)\right\}$$

$$+ \frac{1}{2!}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot (a+h-a)^2 + □(a, b) \cdot (b+k-b)^2$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \cdot (a+h-a) \cdot (b+k-b)\}$$

$$+ \frac{1}{3!}\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b) \cdot (a+h-a)^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a, b) \cdot (b+k-b)^3$$

$$+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a, b) \cdot (a+h-a)^2 (b+k-b)$$

$$+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a, b) \cdot (a+h-a)(b+k-b)^2\}$$

$$+\frac{1}{4!}\{\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(a, b)\cdot(a+h-a)^4+\cdots$$

※ｆ（ａ，ｂ）を左辺に移項すればΔｆの式として書き表せる

このときａ＝ｘ、　ｂ＝ｙ、　ａ＋ｈ＝ｘ＋Δｘ、　ｂ＋ｋ＝ｙ＋Δｙ　とおくと

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)=f(x, y)$$

$$+\frac{1}{1!}\{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\cdot\Delta y\}$$

$$+\frac{1}{2!}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\cdot(\Delta x)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\cdot(\Delta y)^2$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y)\cdot(\Delta x)\cdot(\Delta y)\}$$

$$+\frac{1}{3!}\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y)\cdot(\Delta x)^3+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)\cdot(\Delta y)^3$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x, y)\cdot(\Delta x)^2(\Delta y)$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x, y)\cdot(\Delta x)(\Delta y)^2\}$$

$$+\frac{1}{4!}\{\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y)\cdot(\Delta x)^4+\cdots$$