2010/01/14
冬サブゼミ
ＢＳモデル

ブラック・ショールズの偏微分方程式を解く！

$f_t(S,t)+rS\cdot f_s(S,t)+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\cdot f_{ss}(S,t)=r\cdot f(S,t)$ ・・・・・ i

初期条件；$f(S,t)=\begin{cases}S_t-K & \cdots S_t\geq K\\ 0 & \cdots\cdots S_t<K\end{cases}$

が出発点です
　はじめにｉ式を熱伝導方程式の形に変換する。

熱伝導方程式とは、
　熱伝導方程式というものは数ある偏微分方程式の中で、解がきれいな形で求めることのできる数少ない偏微分方程式として知られている。元々熱の移動を計算するためにフーリエによって導かれ、今では拡散現象を説明できることがわかっている。

$$f_t=\mathrm{C}^2f_{xx}\ \cdots\ ii \qquad\qquad -\infty\leq x\leq\infty \quad t>0$$

　上記のような偏微分方程式を熱伝導方程式と呼び、その解は、初期条件$f(x,0)=f(x)$で関連付けられているのなら

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{C^2\ t}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4C^2t}\right)f(y)dy$$

で与えられる。
この証明は大変面倒ｋ・・、高度な数学的知識が必要とされるため、直感的な説明だけにまとめます。

　ｉ式を解くためには、まず関数のフーリエ変換が必要。なぜならフーリエが熱伝導方程式を解くために必要な変換であると気づいたため。

フーリエ変換とは
　条件；$-\infty<x<\infty$で定義される連続な関数$f(x)$が連続な$f'(x)$をもち、絶対可積分

　↓　；フーリエ変換可能

$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\exp(-i\lambda x)dx$　；ただしｉは虚数単位であり、λは実数

　また$f(x)$は$F(\lambda)$から次のフーリエ逆変換によって求められる。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\exp(i\lambda x)\,d\lambda$$

たとえば、

$$f(x)=\exp(-\frac{x^2}{2})$$

とすると、

$$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\exp(-i\lambda x)\,dx$$

$$=\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-i\lambda)^2}{2}\right)dx\right)}_{①}$$

$$=\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)$$

となり、$f(x)$と$F(\lambda)$はまったく同じ関数になることがわかる。①がなぜ 1 になるかは、標準正規分布の特性を考えればよい。

さて、ⅱ式を満たす$f(x,t)$のフーリエ変換を

$$F(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\exp(-i\lambda x)\,dx\ \cdot\cdot\cdot\ iii$$

とする。そして、f_{xx}のフーリエ変換は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_{xx}\exp(-i\lambda x)\,dx=(i\lambda)^2F(\lambda,t)$$

$$=-i\lambda^2F(\lambda,t)$$

となるから、2 式の両辺に

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-i\lambda x)$$

を掛け、xを$-\infty$から∞まで積分すると、ⅱ式は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_{\mathrm{t}}\exp(-i\lambda x)\,dx+(c\lambda)^2F(\lambda,t)=0$$

となる。そして、ⅲ式より

$$F_t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_t\exp(-i\lambda x)\,dx$$

以上のことからⅱ式は、結局

$$F_t+(c\lambda)^2F(\lambda,t)=0$$

と$F(\lambda,t)$の常微分方程式であらわされる。

つまり、フーリエ変換によって偏微分方程式である熱伝導方程式(2 変数)が、常微分方程式(1 変数)に変わった！

この常微分方程式は変数が 1 つなので解けそうですよね!?実際に解くことができます。ただし、解くためには

① $f(x,t)$の初期条件と$F(\lambda,t)$の初期条件
② $F(\lambda,t)=F(\lambda)e^{-(ci)^2 t}$と逆フーリエ変換行う
③ オイラーの公式より
④ 三角関数の特性
⑤ 変数分離形の微分方程式
⑥ 蓑谷の公式

を駆使すれば必ず解を導き出せる！ただ、ここではブラック・ショールズの偏微分方程式

$$f_t(S,t)+rS\cdot f_s(S,t)+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\cdot f_{ss}(S,t)=r\cdot f(S,t)$$

は、√やらπやら積分やらが出てくるフーリエ変換こそが非常に重要になるため、ここまでの直感的な説明にします。

以上より、熱伝導方程式の解は
初期条件$f(x,0)=f(x)$で関連付けられるとき

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{C^2\ t}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4C^2 t}\right)f(x)dy$$

の形で与えられるとします。

つまり！ブラック・ショールズの偏微分方程式を熱伝導方程式に変換できるのなら、その解を利用して、アッ！！という間に解けるはず。

ではブラック・ショールズの偏微分方程式を熱伝導方程式に変換します。
まず、次の 2 つの変数 u と x を導入します。つまり、(S,t)　を(u,x)に変数変換する。ただし、

$$u=log\frac{S}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

$$x=T-t$$

ここで、uをこの値に定めることの根拠は、ブラック・ショールズモデルの解(資産価格モデルの解)、

$$S_t=S_0 exp\{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma B_t\}$$

から、オプションのペイオフ$f(S,t)=S_t-X$・・・$S_t\geq X$を考えると、離散モデルのときと同様に$\log\dfrac{S}{K}+(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2)T$としたいのですが・・・、変数変換を2回に分けて行うため、とりあえず

$$u=log\frac{S}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

とおく。

$f_t(S,t)$はもちろんのことSとtの関数なのですが､この2つの変数xとuを使って､$f(S,t)$を次のように表現してみます。

$$f(S,t)=e^{-r(T-t)}\cdot y(u,x)$$
$$=e^{-rx}\cdot y(u,x)$$

ｉ式の初期条件はｔ＝Ｔのとき、つまり

$f(S,t)=exp(-rx)$ ・$y(u,x)$にｔ＝Ｔを代入すると

$$f(S,T)=e^{-r0}\cdot y(u,0)=y(u,0)$$

$$u=log\frac{S_T}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-T)=\log\frac{\mathrm{S_T}}{\mathrm{K}}$$

$$e^u=\frac{S_T}{K}$$

$$Ke^u=S_T$$

$$y(u,0)=\begin{cases}Ke^u-K\cdots u\geq 0\\ 0\qquad\qquad\cdots u<0\end{cases}$$

$$=g(u)$$

となりました。

次に、

$$f_s(S,t),f_t(S,t),f_{ss}(S,t)$$

をそれぞれ計算してみると、

1，$f_s(S,t)$の計算

$$=\frac{\partial}{\partial S}f(S,t)$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}f(S,t)\cdot\frac{\partial u}{\partial S}f(S,t)+\frac{\partial}{\partial x}f(S,t)\cdot\frac{\partial x}{\partial S}$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\{e^{-rx}\cdot y(u,x)\}\cdot\frac{\partial u}{\partial S}+\frac{\partial}{\partial x}\{e^{-rx}\cdot y(u,x)\}\cdot\frac{\partial x}{\partial S}$$

$$=e^{-rx}\cdot\frac{\partial}{\partial u}y(u,x)\cdot\frac{\partial u}{\partial S}+\left\{-re^{-rx}y(u,x)+e^{-rx}\frac{\partial}{\partial x}y(u,x)\right\}\cdot 0$$

$$=e^{-rx}\cdot\frac{\partial}{\partial u}y(u,x)\cdot\frac{1}{S}$$

$$=e^{-rx}y_u(u,x)\frac{1}{S}$$

2, $f_t(S,t)$の計算

$$=\frac{\partial}{\partial t}f(S,t)$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\ f(S,t)\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}f(S,t)\cdot\frac{\partial x}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\{e^{-rx}\cdot y(u,x)\}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\left\{-re^{-rx}y(u,x)+e^{-rx}\frac{\partial}{\partial x}y(u,x)\right\}\cdot(-1)$$

$$=e^{-rx}\left[-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial u}y(u,x)+ry(u,x)-\frac{\partial}{\partial x}y(u,x)\right]$$

$$=e^{-rx}[-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)y_u(u,x)+ry(u,x)-y_x(u,x)]$$

3、$f_{ss}(S,t)$の計算

$$f_{ss}(S,t)=\frac{\partial^2}{\partial S^2}f(S,t)$$

$$=\frac{\partial}{\partial S}\{f_S(S,t)\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial S}\left\{e^{-rx}\cdot\frac{\partial}{\partial u}y(u,x)\cdot\frac{1}{S}\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}y(u,x)\frac{\partial}{\partial S}\{\frac{\partial}{\partial u}y(u,x)\cdot S^{-1}\}$$

$$=e^{-rx}\left[\frac{\partial}{\partial S}\frac{\partial}{\partial u}y(u,x)\cdot S^{-1}-\frac{\partial}{\partial u}y(u,x)\cdot S^{-2}\right]$$

$$=\frac{e^{-rx}}{S^2}\left[\frac{\partial}{\partial S}\frac{\partial}{\partial u}y(u,x)\cdot S-\frac{\partial}{\partial u}y(u,x)\right]$$

$$=\frac{e^{-rx}}{S^2}\left[\frac{1}{S}\frac{\partial^2}{\partial u^2}y(u,x)\cdot S-\frac{\partial}{\partial u}y(u,x)\right]$$

$$= \frac{e^{-rx}}{S^2}[y_{uu}(u,x) - y_u(u,x)]$$

1，2，3の計算結果を、ブラック・ショールズの偏微分方程式

$$f_t(S,t) + rSf_s(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{ss}(S,t) = rf(S,t)$$

の左辺に代入してみると・・・・・

左辺

$$f_t(S,t) + rSf_s(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{ss}(S,t)$$

$$= e^{-rx}\left[-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)y_u(u,x) + ry(u,x) - y_x(u,x)\right] + rSe^{-rx}y_u(u,x)\frac{1}{S}$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{e^{-rx}}{S^2}[y_{uu}(u,x) - y_u(u,x)]$$

$$= e^{-rx}\left[-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)y_u(u,x) + ry(u,x) - y_x(u,x) + ry_u(u,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 y_{uu}(u,x) - \frac{1}{2}\sigma^2 y_u(u,x)\right]$$

$$= e^{-rx}\left[ry(u,x) - y_x(u,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 y_{uu}(u,x)\right]$$

右辺

$$rf(S,t) = re^{-rx}y(u,x) = e^{-rx}[ry(u,x)]$$

したがって左辺＝右辺

とすると

$$e^{-rx}\left[ry(u,x) - y_x(u,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 y_{uu}(u,x)\right] = e^{-rx}[ry(u,x)]$$

となります。そこで、両辺からe^{-rx}を消去すると

$$ry(u,x) - y_x(u,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 y_{uu}(u,x) = ry(u,x)$$

つまり

$$-y_x(u,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 y_{uu}(u,x) = 0$$

となるので、ブラック・ショールズの偏微分方程式は、

$$\frac{1}{2}\sigma^2 y_{uu}(u,x) = y_x(u,x)$$

となりました。この式は$C^2 = \frac{1}{2}\sigma^2$の熱伝導方程式である。

このとき、境界条件は

$$y(u,0) = \begin{cases} K(e^u - 1) \cdots u \geq 0 \\ 0 \cdots u < 0 \end{cases}$$

さて、熱伝導方程式への変換が上手くいったので、

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{C^2t}}exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4C^2t}\right)f(y)dy$$

を使ってブラック・ショールズの偏微分方程式を解くと、

$$y(u,x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(a)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-u}{\sigma\sqrt{x}}\right)^2}da$$

ここで 2 回目の変数変換をします。

$$v=\frac{a-u}{\sigma\sqrt{x}}$$

このとき

$$a=u+\sigma\sqrt{x}v$$

なので、境界条件も

$$g(a)=g\left(u+\sigma\sqrt{x}v\right)=\begin{cases}K\left(e^{u+\sigma\sqrt{x}v}-1\right)\cdots v\geq-\dfrac{u}{\sigma\sqrt{x}}\\ 0 \qquad\qquad\qquad \cdots v<-\dfrac{u}{\sigma\sqrt{x}}\end{cases}$$

に変わります。

2 回目の変数変換によって、

$$f(S,t)=e^{-r(T-t)}\cdot y(u,x)$$

の右の部分は$y(u,x)$、

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(a)e^{-\frac{1}{2}v^2}da$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(a)e^{-\frac{1}{2}v^2}\sigma\sqrt{x}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(a)e^{-\frac{1}{2}v^2}dv$$

となりました。

g(a)の境界条件に注目すると

$$y(u,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}\left(Ke^{u+\sigma\sqrt{x}v}-K\right)e^{-\frac{1}{2}v^2}dv$$

となります。

2 つの部分 A,B に分けて、それぞれ積分しましょう。

$$y(u,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}K\,e^{u+\sigma\sqrt{x}v}e^{-\frac{1}{2}v^2}dv-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}\left(Ke^{-\frac{v^2}{2}}dv\right)$$

A についての積分

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}K\,e^{u+\sigma\sqrt{x}v}e^{-\frac{1}{2}v^2}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}K\,e^{u}e^{\sigma\sqrt{x}v}e^{-\frac{1}{2}v^2}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}Se^{rx-\frac{\sigma^2x}{2}}\,e^{\sigma\sqrt{x}v}e^{-\frac{1}{2}v^2}dv$$

$$=Se^{rx}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(v-\sigma\sqrt{x}\right)^2}\,dv$$

ここで次の変数変換

$$z=v-\sigma\sqrt{x}$$

をすると

$$A=Se^{rx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}-\sigma\sqrt{x}}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

B についての積分

$$B=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}\left(Ke^{-\frac{v^2}{2}}dv\right)$$

ここで、次の変数変換

$$\mathrm{z}=\mathrm{v}$$

をすると

$$B=K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}\left(e^{-\frac{v^2}{2}}dz\right)$$

となりました。

いよいよ最終段階に入りました。

以上のことから、ブラック・ショールズの偏微分方程式の解

$$f_t(S,t)=e^{-r(T-t)}\cdot y(u,x)$$

の右の部分は A と B を合わせることにより

$y(u,x)$

$$=Se^{rx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}-\sigma\sqrt{x}}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz-K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}\left(e^{-\frac{v^2}{2}}dz\right)$$

$$=Se^{rx}\cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}+\sigma\sqrt{x}\right)-K\cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right)$$

となりました。

最後に、

$$y(u,x) = Se^{rx} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - K \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right)$$

をブラック・ショールズの偏微分方程式の解

$$f_t(S,t) = e^{-r(T-t)} \cdot y(u,x)$$

に代入すると

$$f(S,t) = e^{-rx}\left\{Se^{rx} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - K \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right)\right\}$$

$$= S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - Ke^{-rx} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right)$$

となります。

これが求めるブラック・ショールズの公式なのです。