

第2章 債券価格の決定と金利リスク管理

2.1.1 割引率の決定要因

- 景気変動 : インフレが起きた場合⇒将来受け取るであろうお金の価値減少
- 時間選好 : 将来貰えるまで待つのは忍耐が必要
- 収入の増減 : 将来収入が上がれば将来もらえる一万円の価値は減少

2.1.2 割引率、スポットレートの定義

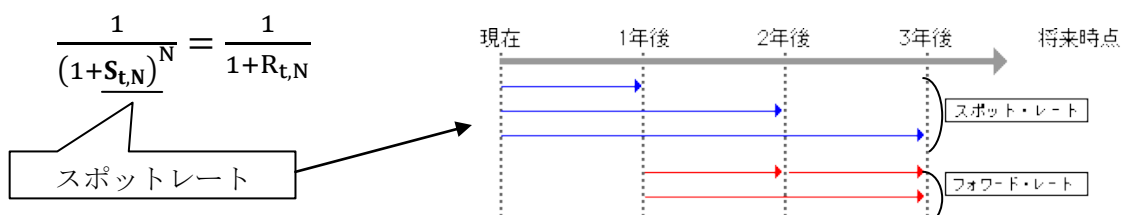
・今を t 年、 N 年後の1単位を割り引くとすると・・・

$$\frac{1}{1 + R_{t,N}}$$

と表せる。

しかし、一般的には $R_{t,N}$ は使わず

年率換算した金利 $S_{t,N}$ を使い以下のように表す



2.1.3 債券とは

- 債券 : 将来のあらかじめ定められた時点で定められた所得を受け取る権利を有した経済的な債権のこと
 - 満期がある ※永久債のように満期の無いものも稀にあり
 - クーポン(利息) : 満期までに定期的に支払われる所得 ※利付債のみ
⇒クーポンの額面金額に対する比率を**クーポン利率**という
 - 元本(額面金額) : 満期に支払われる所得

～債券の分類方法～

- ①有期債 or 永久債 : 満期があるかないか ※日本では永久債の事例なし
- ②利付債 or 割引債 : クーポンの支払いがあるかないか
- ③「国債」「地方債」「社債」 : 発行主体の違い
- ④長期債 or 短期債 : 満期までの残存期間が1年以上か未満か

2.1.4 債券価格とスポットレート

- 債券価格 : 将来受け取る所得を現在の価値に割り引いたもの
※今回はデフォルトリスクを除く

～債券価格導出方法～

利付債

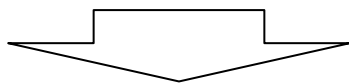
< t 年(現時点)発行、満期 N 年後、満期まで毎年 C のクーポン (利息)、満期には元本 B 償還 >

- ①、毎年支払われるクーポンについて現在価値に割り引く
t + τ 年に支払われるとして、

$$\text{クーポンの現在価値} = \frac{C}{(1 + S_{t,\tau})^\tau} \quad \text{※ } \tau \text{ は変数}$$

- ②、元本について現在価値に割り引く

$$\text{元本の現在価値} = \frac{B}{(1 + S_{t,N})^N}$$



- ③、クーポンの現在価値と元本の現在価値を足す

$$\frac{C}{1 + S_{t,1}} + \dots + \frac{C}{(1 + S_{t,\tau})^\tau} + \dots + \frac{C}{(1 + S_{t,N})^N} + \frac{B}{(1 + S_{t,N})^N} = \text{債券価格}$$

割引債

➡ クーポン (利息) がいないため、元本の現在価値がそのまま債券価格になる



$$\frac{B}{(1 + S_{t,N})^N} = \text{債券価格(P)}$$

さらに上記の割引債の債券価格を求める式を展開すると

$$\frac{B}{P} = (1 + S_{t,N})^N \quad \text{となる。}$$

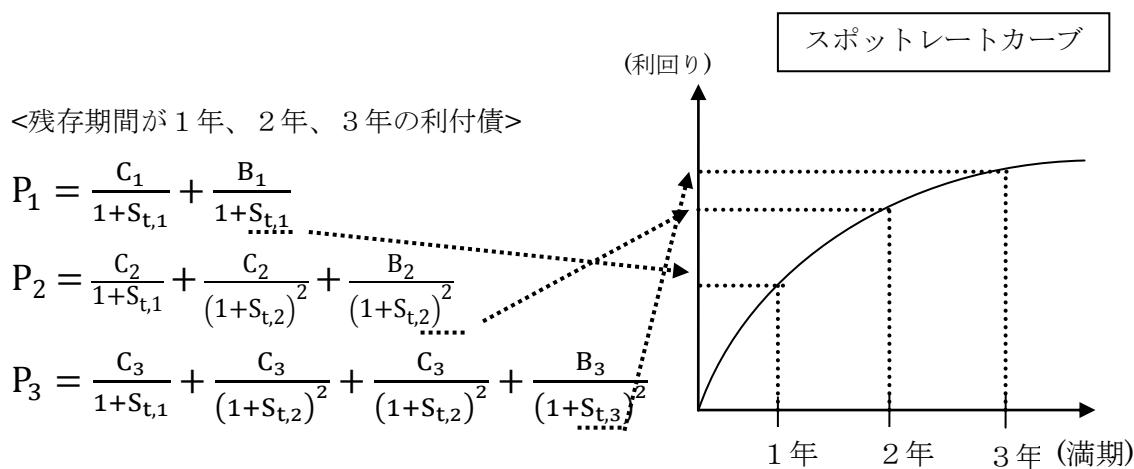
- ⇒ P の額で購入して B の額で払い戻しを受けたときの運用利回り (左辺) が、
スポットレートを運用期間でべき乗したものと等しいことを表している
⇒ スポットレート = 該当期間の運用利回りを年率で表したもの

2.2.1 金利期間構造（タームストラクチャー）と期待仮説

例えば、国債のようにリスクの小さい同種証券を考えると、満期までの期間によって、利回りは異なる

- **金利期間構造** : 割引の対象となる将来時点を変化させていくことでスポットレートがどれだけ変化するか
グラフで表したものを**スポットレートカーブ**(利付債)という。
※信用リスクの等しい債券で比べる
(期間のみのリスク要因で変化するスポットレートを見るため)

残存期間の異なる債券から複数のスポットレートを導出



上記のような式を満たす $S_{t,1}$ 、 $S_{t,2}$ 、 $S_{t,3}$ がそれぞれ異なる期間のスポットレートとなる

2.2.2 期待仮説とスポットレート

- スポットレートカーブは、将来の利回りがどのように推移していくと予想されているのかを示している

⇒この予想が正確なら、将来の短期金利から長期金利を予想できる（＝**期待仮説**）

<前提> ①、将来の短期金利が分かっている
②、デフォルトリスクがない

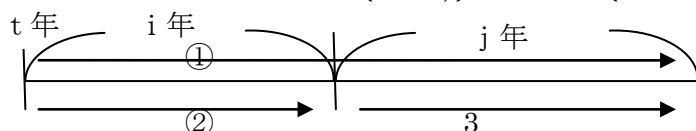
2つの運用方法を考える

- ◆ t 年(現在)の時点で最初から $i+j$ 年の期間の運用期間で運用する …①

式で表すと $(1 + S_{t,i+j})^{i+j}$

- ◆ t 年の時点では i 年の運用の期間で運用し、 $t+i$ 年の時点で j 年の運用に乗り換える …②

式で表すと 前半 = $(1 + S_{t,i})^i$ 後半 = $(1 + \tilde{S}_{t+i,j})^j$



※もし上記の二つの運用方法で利回りに差が出てきてしまったとしたら、投資家は利回りが高い方に投資をする

⇒裁定が働くことで、この二つの利回りは等しくなる

式で表すと $(1 + S_{t,i+j})^{i+j} = (1 + S_{t,i})^i (1 + \tilde{S}_{t+i,j})^j$ ※右辺：相乗平均

更に、投資家が予測しているスポットレート $1 + \tilde{S}_{t+i,j}$ について解くと、

$$1 + \tilde{S}_{t+i,j} = \left[\frac{(1 + S_{t,i+j})^{i+j}}{(1 + S_{t,i})^i} \right]^{\frac{1}{j}} - 1 \quad \text{となる。}$$

2.2.3 フォワードレート

➤ 実務上、将来のスポットレートの予測値 ($\tilde{S}_{t+i,j}$) はフォワードレートと呼ぶ。

つまり、 $f_{t+i,j} = \tilde{S}_{t+i,j} = \left[\frac{(1 + S_{t,i+j})^{i+j}}{(1 + S_{t,i})^i} \right]^{\frac{1}{j}} - 1$ となる。

そこから、期待仮説が成立しているということを表せば、

$f_{t+i,j} = S_{t+i,j}$ (← 実際の将来のスポットレート) ということになる

2.2.4 スポットレートと最終利回り

➤ 最終利回り : 元本(B_N)とクーポン(C_N)を一律の年利率で割り引くと、債券の市場価値(P_N)と等しくなるような利回りのこと

※クーポンのない割引債ではスポットレートと同じ

複利ベースの利付債の最終利回りで作ったグラフを**イールドカーブ**と呼ぶ

⇔スポットレートカーブ：複利ベースの割引債の最終利回りで作ったグラフ

➤ 価格イールド曲線：最終利回りを変化させることで債券価格がどのくらい変化するのを見たグラフ

～価格イールド曲線の特徴～ P81 グラフ参照

残存期間：10年、額面：100円、クーポン利率10%の利付債

特徴① 最終利回りが高いほど、債券価格は低下する

特徴② 最終利回りがクーポン利率と等しい(10%)ところで債券価格＝額面価格となる

⇒クーポン利率 > 最終利回り ⇒ 債券価格 > 額面(オーバーパー)

⇒投資家側の損

特徴③最終利回りが0%の水準では元利支払い合計に等しくなる(200円)

特徴④クーポン利率が高くなると、価格イールド曲線は上方にシフトする（図 2.2）

特徴⑤残存期間を延長させると傾きが急になる

⇒最終利回りを一定だけ変化させた場合、価格の変化具合が大きくなる

2.3 金利リスクとデュレーション

- 市場金利 : 金利リスクとは、将来の金利変動によるリスクのこと
EX) 金利の上昇 ⇒ 債券価格の低下
- デュレーション : 平均残存期間（平均回収期間）、投資額分の回収期間
 - ※ 利付き債の場合、満期までの期間より短くなる
 - ※ 金利リスク管理の際に重要になってくる
 - ※ デュレーションが短ければ短いほど、価格変動幅が小さくなる。（P83 グラフ）

2.3.1 指数表示の割引

<年間の利回りを r とする>

- ✓ 1 年間の運用 ⇒ $(1 + r)$
- ✓ 半年毎に $\frac{r}{2}$ の利回りで 1 年間複利運用 ⇒ $\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$
- ✓ 1 年間を m 期に分割し、各期間ごとに $\frac{r}{m}$ で 1 年間複利運用

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

以上のように表される。

- ✓ 1 年間を無限に細分化する場合(=上記の m 期が無限になる場合)

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = \exp(r)$$

※ r は年利率を表し、ゼロに近い値になる

$$\Rightarrow \exp(r) \approx 1 + r \quad \text{上記式の近似値}$$

- ✓ 割引く場合

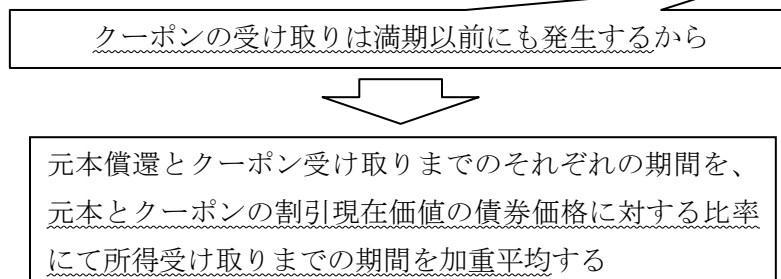
$$\Rightarrow \frac{1}{(1 + r)^\tau} \approx \exp(-r \tau) \quad \text{上記の近似式を用いた近似式}$$

- ✓ 上の近似式を用いて、最終利回りを用いた債券価格決定式は

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_N &= \frac{B_N}{(1+r_{t,N})^N} + \sum_{\tau=1}^N \frac{C_N}{(1+r_{t,N})^\tau} \\ &\approx B_N \exp(-r_{t,N} N) + \sum_{\tau=1}^N C_N \exp(-r_{t,N} \tau) \end{aligned}$$

2.3.2 デュレーションの定義

➤ デュレーション : 平均残存期間 (平均回収期間) ※ × 満期までの期間



<N 年満期の利付債券が最終利回りで表されているときのデュレーション>

$$1 \times \frac{C_N \exp(-r_{t,N})}{P_N} + \dots + \tau \times \frac{C_N \exp(-\tau r_{t,N})}{P_N} + \dots + N \times \frac{(C_N + B_N) \exp(-N r_{t,N})}{P_N}$$

加重平均して
いるウェイト

となる。

以上により、平均残存期間は表された。

しかし、この平均残存期間は、実質的にどのような意味があるのか。

～デュレーションの 2 つ目の意義～

・利回りを変化させるとデュレーションも変化する (グラフでは右下がりの関係)

↓ そこからつまり…

➤ デュレーション : 金利が変動したときの、価格変動性を示す指標となる
⇒金利の限界的な変化に対応する債券価格の変化率を表す
⇒金利が 1% 増えたときに債券価格がどの程度変化するか

<最終利回りを用いた価格決定式を最終利回りについて微分すると…>

$$\frac{\partial P_N}{\partial r_{t,N}} = - \sum_{\tau=1}^N [\tau \times C_N \exp(-r_{t,N} \tau)] - N \times B_N \exp(-r_{t,N} N)$$

⇒右辺が上記のデュレーション算出式の分子に一致

⇒これを P_N で割ると、

$$\frac{\frac{\partial P_N}{\partial r_{t,N}}}{P_N} = -D_N$$

が導出される。

最終利回りの変化に
よる債券価格の変化

デュレーション
※金利の上昇⇒価格の下落

- 以上の式より、デュレーションが大きいと、金利が変化した場合の価格変動分が大きい事が分かる

⇒ デュレーションの特性をみれば、どのような債券が金利変化に関する価格反応度が高いか分かる

EX)

- 満期までの残存期間が長い → デュレーションの長期化
⇒ 債券価格の金利感応度が高まる
- クーポン利率が上昇 → クーポン現在価値が上昇し、ウェイトが高まる
⇒ デュレーションの短縮化
⇒ 債券価格の金利感応度が低下する

～デュレーションの意味を図形的に（価格イールド曲線によって）見る～

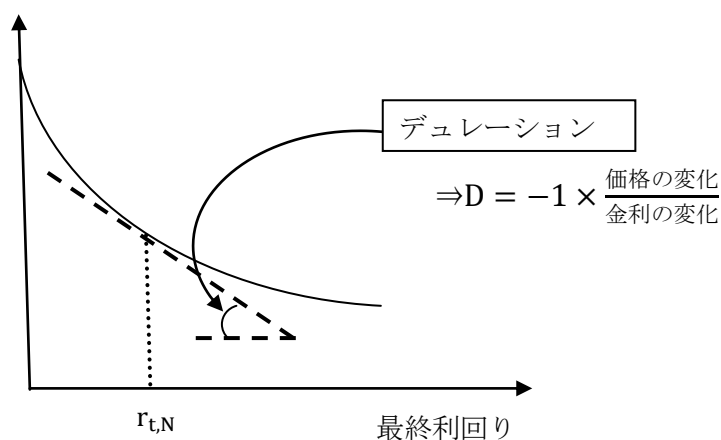
※今回は自然対数値で表したものを縦軸にとる

- （P88 図 2.4 参照）：利付債の価格イールドカーブ

最終利回り $r_{t,N}$ における曲線の傾きは金利変化に対する債券価格の変化率を表す

⇒デュレーション

債券価格の自然対数

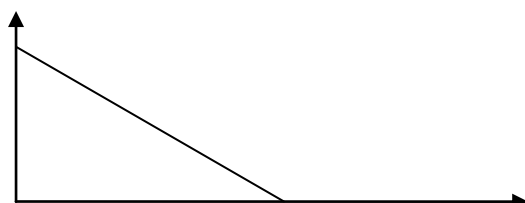


- （P88 図 2.5 参照）：割引債の価格イールドカーブ

- ・デュレーションは満期までの残存期間に一致

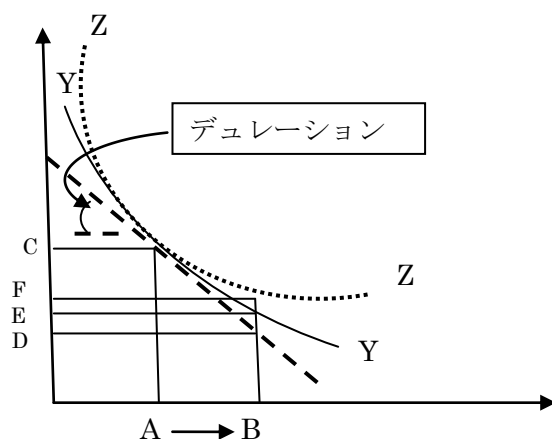
⇒利回りに左右されず、傾き（デュレーション）は一定

= 価格曲線は直線になる



エクセルにて確認可能

- ※ クーポン比率が低い場合、デュレーションは利回りの変化に影響を受けにくい
＝直線に近い（エクセルにて確認可能）
- 価格イールド曲線が直線に近い場合、大きな金利変化があってもデュレーションは
あまり変わらない（P89 図 2.6 参照）



- ※ 通常の債券契約では、価格イールドは直線に近い
- ✓ 実際の価格イールド曲線が、曲線 YY のように直線に近い場合
⇒ 価格変化率は点 C から点 E まで
- ✓ 最終利回りが点 A の時点での傾きに対応する直線を価格イールド曲線とした場合
⇒ 価格変化率は点 C から点 D まで

両者の価格変化率にそこまで差が出ないことが分かる



- ✓ 価格イールド曲線が直線に近い場合、大きな金利変化があってもデュレーションによる債権価格変化率の測定にあまり大きな変化は生じさせない

以上のことから、以下の式が有効となる

債券価格の変化率 $\div$ -デューレーション $\times$ 最終利回りの変化幅

- 価格イールド曲線が直線からかけ離れている場合
 - ✓ 価格イールド曲線が ZZ 曲線のように直線からかけ離れている
- つまり、最終利回りが上昇していくに従ってデュレーションが急激に短縮する場合
- ⇒ 価格変化率は点 C から点 F まで
 - ⇒ 大きな誤差を生む可能性あり

～解決法～

- **コンベキシティ**
 - ⇒ 債券価格を、最終利回りに関して2階の微分をする
 - ⇒ デュレーションのみを使う方法を矯正するイメージ

$$\begin{aligned} \text{債券価格の変化率} = & \text{デュレーション} \left(-\frac{\frac{\partial P_N}{P_N}}{\partial r_{t,N}} \right) \times \text{最終利回りの変化幅} \\ & + \frac{1}{2} \text{コンベキシティ} \left(\frac{\partial^2 P_N / P_N^2}{\partial r_{t,N}^2} \right) \times (\text{最終利回りの変化幅})^2 \end{aligned}$$

2.3.3 最終利回りとスポットレート

- 最終利回り : 一律の年率金利を用いて債券価格を導き出すための金利
- スポットレート : 該当期間の運用利回りを年率で表したもの
- ✓ 期待仮説のもとで将来の金利情報を現在の金利期間構造に正確に反映しているのはスポットレート曲線である

～スポットレート曲線上での「各期のスポットレートの限界的変化」～

<N年の利付債券にて、各期のスポットレートの限界的な変化が債券価格に与える影響>

$$\partial(P_N) = - \sum_{\tau=1}^N \left[\tau \times C_N \exp(-S_{t,\tau} \tau) \partial(S_{t,\tau}) \right] - N \times B_N \exp(-S_{t,N} N) \partial(S_{t,N})$$

ここでもし、すべてのスポットレートが一率に $\partial(S)$ だけ変化した場合

$$\frac{\frac{\partial(P_N)}{\partial(S)}}{P_N} = -D_N \quad \text{と書き換えられる}$$

- ⇒ 最終利回りを用いたデュレーション(P86)のケースと同じ
- ⇒ P92 図 2.7 のように、平行移動する
- ⇒ デュレーションにて金利リスクの管理が出来るのは平行移動する場合のみ
=各期間のスポットレートで違う変化幅では、デュレーションで直接分析することはできない
- ⇒デュレーション分析を適用すべき環境であるか見極める必要性アリ

2.3.4 変動利付き債券

- 変動利付債 : クーポン(利息)がその時々¹の経済・景気情勢によって変わる債券
 - ✓ 満期までの期間が残っているのにも関わらず、デュレーションを0にできる
 - ✓ 事前に定められたリセット日と呼ばれる期日毎に金利が更改され、この事前に定められた小期間内だけはクーポンが一定
- ⇒毎年²の利息支払い毎に、翌年の利息支払いのクーポン利率をその時点の1年ものスポットレートに設定する

<以下で t 年に発行した N 年後の変動利付債を見る>

満期の一年前(t+N-1 年)には、クーポン利率を
その時点でのスポットレート($S_{t+N-1,1}$)に設定

$$B_N = \frac{1}{1 + S_{t+N-1,1}} \times (S_{t+N-1,1} B_N + B_N)$$

期間が連続することで、常に債券価格が額面金額に等しいことが分かる

2.3.5 金利管理（イミュニゼーション）

☆ 金利リスクをなくす（管理する）方法

➤ バンク・イミュニゼーション（金融機関目線）

・ 金融機関としての立場 : 債務側（預金） or 運用側

⇒債務サイドのデュレーションと資産サイドのデュレーションを近づける

⇒金利変化による収益変化のリスクを減らす

➤ プランニング・ピリオド・イミュニゼーション

・ 投資期間に焦点を置いて金利リスクを管理方法

⇒デュレーションを変化させることなく金利リスクをなくす

～方法～

一度にすべての投資額を投資するのではなく、運用期間の異なる投資先に分割して投資

※ それぞれのデュレーションの平均が、一度にすべて投資額を投資した場合のデュレーションと一致するように分散して運用

2.4 金利派生商品（基礎編）（P96）

金利派生商品を活用できれば、金利変動のリスクをイミュニゼーションできることから、4節からは金利派生商品について確認していく。また、金利派生商品を使ってどのようにリスクをヘッジするか例を使いながら確認する。

理論的な仮定

- ①スポットレートは予め与えられたものとして金利派生商品の価格は算出する（金利派生商品の売買はスポットレートに影響を与えない）。
- ②裁定価格理論に従い、裁定機会が存在しないものとする。

それでは次から

①先渡し契約

②先物契約

③スワップ契約

の3つの金利派生商品契約について見ていく。

2.4.1 先渡し契約の価格決定

(1)先渡し契約と先物契約

定義：あらかじめ定められた価格で、定められた時期に商品を売買する契約のこと。

先渡し契約と先物契約もどちらも将来の売買を予約するという面では同じであるが、いくつかの相違点がある。

- ①先渡し契約は店頭で取引され、先物契約は取引所で取引される。
- ②先渡し契約は満期日に証券の受け渡しが行われるが、先物契約では売買差額で差金決済することがある。

Ex)

1年後に1株200\$で買う契約をしているとする。

(先渡しの場合)

1年後の株価がどうなつていようと1株200で株式の売買が行われる。

(先物で差金決済する場合)

1年後の株価が210\$だったら、200\$で本当に売買するのではなく、買主側の利益10\$分だけ売主が送金する。

③先渡し契約は原則キャンセル不可。先物契約は（買い約束していれば、新たに売り約束をして）解約可能。

Ex)

先物契約で1年後に1株100\$の証券を買う約束をしている。それを解約したい場合1年後に1株100\$で証券を売る約束を取り付けばよい。

④先物契約は値洗いという仕組みがある。先物契約の利益および損失は毎日計算され、損失があればその分を取引所に支払い、利益があればその分を受け取るシステム。

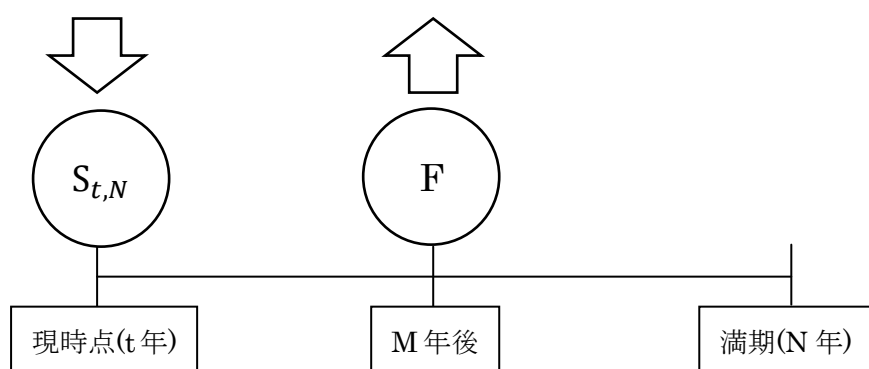
教科書 27 章 B 班のレジュメより

相違点	先渡し契約	先物契約
取引場所	店頭取引	取引所取引
取引条件	自由	定型化
市場の流動性	低い	高い
委託証拠金	なし	あり
信用リスク	高い	低い
決済方法	現物決済	差金決済

(2)先渡し価格決定：保有コストモデル

<現時点(t 年)>

- 割引債 1 単位を $S_{t,N}$ の値段で購入（購入資金 $S_{t,N}$ はスポットレート of 金利水準で借り入れるとする）
- 先渡し契約によって M 年後にその割引債を F の値段で売る約束をする。



<M 年後>

- $S_{t,N}(1 + s_{t,M})^M$ だけ金利分を含めて返済しなければならない ($s_{t,M}$ は金利。この金利は予め与えられていると考える [仮定①])
- F の値段で割引債を売る

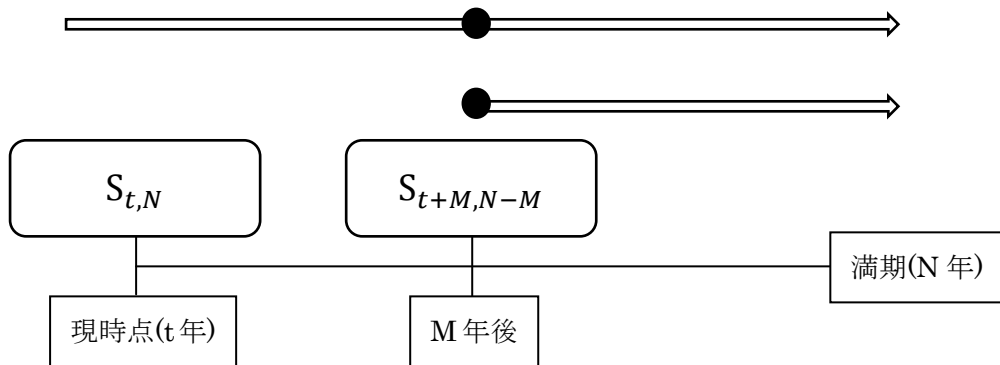
ここで[仮定②]より裁定は働かないものとするので、以下の式が成り立つ。

$$F = S_{t,N} \times (1 + s_{t,M})^M \quad (2.4)$$

◆(2.4)の式より

①M 時点で残存期間 N-M の割引債現物価格(i) $S_{t+M,N-M}$ と(ii) $S_{t,N}(1 + s_{t,M})^M$ は等しくなる ([仮定②]より)

$$F = S_{t,N} \times (1 + s_{t,M})^M = S_{t+M,N-M} \quad (2.5)$$



この(2.5)の式より

t 時点から見た先渡し価格 F は、将来の割引債の価格と考えることが出来る。

②先渡し価格 F は保有コスト（ここで言えば借り入れた $S_{t,N}$ にかかる金利 $s_{t,M}$ ）の大きさによって決まる。

$$F = S_{t,N} \times (1 + s_{t,M})^M$$

$s_{t,M}$ が大きいほど F が大きくなる。

この債券が割引債ではなく利付債だとしたら、決まった時期にクーポン収入が得られる。つまり保有コストが下がる。

コスト＝金利

収入＝クーポン収入

$$\text{よって } F = \underbrace{S_{t,N} \times (1 + s_{t,M})^M}_{\text{金利分}} - \underbrace{\sum_{\tau=1}^M C \times (1 + s_{\tau,M-\tau})^{M-\tau}}_{\text{クーポン収益}}$$

(3)バックワーデーション

定義：先渡し価格が現物価格より高い状態のこと

<本来>

$$S_{t,N} < F$$

でなければならない。なぜなら、F には $(1 + s_{t,M})^M$ 分の金利が上乗せされているから。

<バックワーデーションの場合>

$$S_{t,N} > F$$

となってしまう。なぜか？

$S_{t,N}$ で購入した債券の流動性が低く、高い賃借料で他の人に貸し出すことが出来るため。
どういうことか？金利分<賃借料（クーポンと同じように考える）

$$F = S_{t,N} \times (1 + s_{t,M})^M - \sum_{\tau=1}^M C \times (1 + s_{t,M-\tau})^{M-\tau}$$

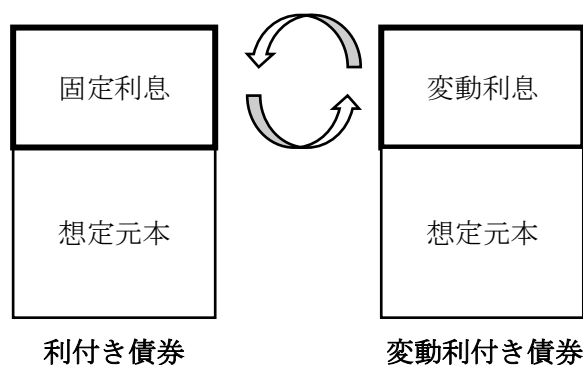
つまり $-\sum_{\tau=1}^M C \times (1 + s_{t,M-\tau})^{M-\tau}$ の部分が大きくなりすぎたため、F が下がったのである。

2.4.2 金利スワップの仕組み

金利スワップ：金利の受け取りを交換する取引

この章では「利付き債券」の「固定利息部分」と「変動利付き債券」の「変動利息部分」を交換する取引のことを指す。

※変動利息と変動利息を交換するスワップ取引など、種類はいくつかある。



[固定利息部分]

$$\sum_{\tau=1}^N \frac{C}{(1 + s_{t,\tau})^{\tau}} \quad (1)$$

[変動利息部分]

(2.3)の式より、

$$B = \text{変動クーポン部分の割引現在価値} + \frac{B}{(1 + s_{t,N})^N}$$

$$\text{変動クーポン部分の割引現在価値} = B - \frac{B}{(1 + s_{t,N})^N} \quad (2)$$

この(1)と(2)の価値は常に等しいとは限らない。

そこで変動利息が予測されている場合、固定金利をいくらにすればお互いの価値が等しくなるか考える。

変動利息 = 6 ヶ月 LIBOR (ロンドン市場の銀行間金利)、6 ヶ月 TIBOR(東京市場の銀行間金利)など

固定金利はどれだけ必要か？

$$\sum_{\tau=1}^N \frac{er}{(1 + s_{t,\tau})^\tau} = 1 - \frac{1}{(1 + s_{t,N})^N} \quad (3)$$

※単純化するため元本を1と考え、固定金利「er」を求める！この固定金利「er」を金利スワップレートと言って、日経新聞に毎日記載されている。

この「er」より分かること！

- ①固定金利は将来の変動金利の予想によって決まる。
- ②固定金利が高いほど、将来金利が上昇するだろうと考えている。

補足：LIBOR は 1 年、2 年、3 年、4 年、5 年、7 年、10 年、15 年、20 年、30 年のスワップレートが算出されている。

TIBOR も 1 年、2 年、3 年、4 年、5 年、7 年、10 年と算出されている。

2.4.3 先物契約の価格決定

(1)債券先物取引の仕組み

2.4.1 で述べた通り、先渡し契約と先物契約にはいくつかの違いがあった。

- 先物取引は取引所で不特定多数の人々の間で取引がされている。

よって、先物取引では取引を行う上でルールを作る必要があった。

[ルール]

その 1 : 値洗い制度によって、毎日差金決済が行われる

その 2 : 全ての取引の間に取引所が入る

その 3 : 取引をする際には「証拠金」という担保を収める

証拠金によって契約不履行による損失を埋める。

さらに債券先物に限ってさらに特殊なルールがある。

[ルール]

その 1 : 受け渡し決済日が 3 月 20 日, 6 月 20 日, 9 月 20 日, 12 月 20 日に決まっている。

その 2 : **標準物**と呼ばれる**架空の国債**を原資産として取引する（東証ではクーポン利率 6%、償還期限 10 年の長期国債を標準物としている）

[その 2 の意味]

まず、基準となる国債を作る（架空で）。

そして、その基準となる債券と似たような債券（それを**受け渡し適格銘柄**と言う）ならば受け渡しに使ってもよいというルール。

なぜそのようなルールが必要か？

たくさんの投資家がこの売買に参加できるように！

[問題点]

標準物と受け渡しに使う債券は違う。つまり自然と債券価格も違ってくる。

ではその債券の価格はいくらか？

債券の価格＝標準物×**交換比率**という形で求める。

交換比率：標準物 1 に対して、受け渡しされる債券の価格はいくらに相当するかを測る比率

交換比率が 1 以上ならば、その債券の価格は標準物より高いということ。

逆に言えば、交換比率が 1 以下ならば、その債券の価格は標準物より低いということ。

ではその交換比率はどのように求めるのか？

$$CF_{N,cr}(\text{交換比率}) = \frac{1}{1.06^N} + \sum_{\tau=1}^N \frac{cr}{1.06^{\tau}} \quad (1)$$

[式の意味]

額面が 1、満期が N 年、市場金利が 6%、クーポンレートが cr の債券の価値

cr が高いほど $CF_{N,cr}$ は高く、cr が低いほど $CF_{N,cr}$ は低くなる。

なぜか？ クーポンレートが低いほど、債券価値は低くなるから。

(2) 債券先物価格の決定メカニズム

[仮定②]：裁定取引の機会が存在しない

→ 値洗いによって収益を上げることはできない。

なぜか？

例えば残存期間 N 年の割引債を M 年後に買うという先物契約をしたとする。

現在先物価格は 100 円、次の年の先物価格は 101 円だとすると、値洗いによって 1 円の差金収入が入る ($101 - 100 = 1$)

この 1 円を運用して $1 \times (1+r)$ の運用収益を上げられる。

つまり、自己資金なくして収益を上げることができる。

仮定②より裁定取引は存在しないので、収益は上げられない。よって先物価格はどの地点に立っても常に一定でなくてはならない。

$$F_{t+\tau} = F_{t+\tau-1} \quad (2.6)$$

この式より

$$F_t = F_M$$

満期日における先物価格は現物価格と一致するので、 F_M は残存期間 N-M 年の割引債価格 $S_{t+M, N-M}$ に等しくなる。理論は先渡し価格の時と同じ！よって

$$F_t = S_{t+M, N-M} \quad (2.7)$$

期待仮説が成り立ち、スポットレートが時間を通じて変化しないという仮定のもとでやってみたが、現実にはスポットレートは変化するので、この理論は正確ではない。が、近似値としては成立するので、有効なモデル。

2.4.4 金利派生商品による金利リスク・ヘッジ

金利派生商品について見てきたので、どのようにリスクをヘッジするか具体例を用いて確認する。

例)

- 1 年物、2 年物、3 年物、4 年物のスポットレートがそれぞれ 4%、5%、6%、7%だとする。
- 目標は 4 年で 1000 万円確保すること

[Case1]

今、3年物の割引債に763万円投資している。

3年目には3年物のスポットレート6%より、 $763 \times 1.06^3 = 909$ 万円になっている。

4年目に10%の利回りで運用して $909 \times 1.1 = 1000$ 万となり、目標達成。

[Case2]

3年目まではCase1と同じなのだが、4年目で10%ではなく8%でしか運用できなかった。

$909 \times 1.08 = 982$ 万円しか手に入らない。目標達成ならず。

[Case3]

Case2に「3年目の時点で残存期間1年、額面1000万円の割引債を買うことを予約」という先物契約加える。

この割引債の現在の価格は $\frac{1000}{1.07^4} = 763$ 万円

保有コストモデル、つまり(2.4)の式より、

$$F = S_{t,N} \times (1 + s_{t,M})^M = 763 \times 1.06^3 = 909$$

3年目にスポットレートが10%から8%に下がったとすると、債券価値は $\frac{1000}{1.08} = 926$ 万となり、926万の物を909万で買えることになる。

この現物価格と先物価格の差金17万をスポットレート8%で運用することで、1年後に18.36万になり、Case2の982万と足して、目標金額1000万を達成！！

2.5 金利派生商品（不確実性の導入）（P112）

今まではスポットレートが不確実に変化しないという仮定のもと、金利派生商品の価格を求めてきたが、これからは金利に不確実性を導入する。

2.5.1 二項過程モデルの活用

不確実性を導入と言っても、適当に変化するようなモデルで考えるということは難しいので、1年のスポットレートの変動を考える。

[二項格子]

(状態)					
3				r33	
2			r22	r32	
1		r11	r21	r31	
0	r00	r10	r20	r30	
	0	1	2	3	(時間)

まず、初期の金利を「r00」とする。

r00が上昇する割合をu

下降する割合をdとする。

Ex) $r11 = r00 \times u$

$r10 = r00 \times d$

具体的に初期の短期金利 7%、上昇方向に 30%($u=1.3$)、下降方向に 10%($d=0.9$)の変化がある可能性のある短期金利の二項格子を作ってみる。

6							33.79
5						25.99	23.39
4					19.99	17.99	16.19
3				15.38	13.84	12.46	11.21
2			11.83	10.65	9.58	8.62	7.76
1		9.10	8.19	7.37	6.63	5.97	5.37
0	7.00	6.30	5.67	5.10	4.59	4.13	3.72
	0	1	2	3	4	5	6

2.5.2 二項格子から金利期間構造

短期金利は上の表のように変動していくとする。

また、上昇の確率はそれぞれ 1/2 に等しいと仮定する。

1		100
0	93.5	100
	0	1
1年物割引債		

2			100
1		91.7	100
0	86.8	94.1	100
	0	1	2
2年物割引債			

どのように債券価格を求めたか？

1 年物割引債： $100/1.07=93.5$

2 年物割引債： r_{11}, r_{10} の価格を求める

$$r_{11}=100/1.091=91.7$$

$$r_{10}=100/1.063=94.1$$

$$r_{00}=\text{加重平均で}\frac{1}{2}\times\frac{91.7}{1.07}+\frac{1}{2}\times\frac{94.1}{1.07}=86.8$$

$$100=86.8\times(1+r)^2$$

$$r=\left(\frac{100}{86.8}\right)^{\frac{1}{2}}-1=7.34\%$$

このように一つ一つ加重平均を取って 3 年物、4 年物、5 年物、6 年物のスポットレートを求めると次のようになる。

	割引債価格	スポットレート
1	93.5	7.000%
2	86.8	7.340%
3	80.1	7.694%
4	73.3	8.061%
5	66.7	8.438%
6	60.2	8.823%

短期金利の初期値、金利の上昇・下降度合い、上昇・下降の確率が分かれば、スポットレートの算出が出来る。

2.5.3 金利期間構造から二項格子

また Hoo と Lee という学者はこの上昇・下降度合いで二項格子を作るのではなく、短期金利を求める数式を作成し、それによって二項格子を作成した。

「仮定：上昇と下降の確率はどちらも 1/2」

$$\text{式：} r_{ks} = a_k + b \times s$$

つまり今までは

$r_{11}=r_{00} \times u$ 、 $r_{10}=r_{00} \times d$ 、のように求めたものを、

$$r_{11} = a_1 + b \times 1$$

$$r_{10} = a_1 + b \times 0$$

というように求め、2 項格子を作成し、スポットレートを算出する。

2.5.4 先渡し価格と先物価格

金利の変動を加味すると金利派生商品はどのような影響を受けるのか？

<復習>

金利の変動を加味せず、スポットレートを与えられたものとして考えた場合。

[先渡し価格]

$$F = S_{t,N} \times (1 + s_{t,M})^M = S_{t+M,N-M} \quad (2.5)$$

[先物価格]

$$F_t = S_{t+M,N-M} \quad (2.7)$$

よって先渡し価格と先物価格は等しくなる。

<金利変動を加味して、スポットレートを二項格子から求めた場合>

[先渡し価格]

$$F = S_{t,N} \times (1 + s_{t,M})^M = S_{t+M,N-M}$$

式自体は変わらない！

$s_{t,M}$ が金利変動を加味している。

例)

- 4 年目に残存期間が 2 年の割引債を購入・売却する約束をしている先渡し取引の価格。
4 年目に残存期間が 2 年ということは 6 年物割引債ということ。
6 年物割引債の現在価値は 60.2 とする（上の表より）
4 年間保有するので、金利は 4 年物スポットレート 8.061%（表より）支払う必要がある。
→ $60.2 \times (1 + 0.08061)^4 = 82.10$

[先物価格]

金利変化がない場合は

$$F_{t+\tau} = F_{t+\tau-1} \quad (2.6)$$

これはどの地点においても先物価格は等しく、そこから裁定取引が生じないというルールであった。

そこにさらに、どの金利変化があったとしても裁定機会は生じない価格を設定しなければならない。

<考え方>

まず、6年もの割引債の価格表を出してみる。

作り方は 2.5.2 で見た二項格子を使う。

6							100.0
5						79.4	100.0
4					68.4	84.8	100.0
3				62.7	76.3	88.9	100.0
2			60.1	71.8	82.6	92.1	100.0
1		59.5	69.8	79.2	87.4	94.4	100.0
0	60.2	69.3	77.6	84.9	91.0	96.0	100.0
	0	1	2	3	4	5	6
6年物割引債							

$$F_M = S_{t+M.N-M} \quad (2.7)$$

(2.7)の式、つまり満期の先物価格と現物価格は等しくなることから

4					68.4
3					76.3
2					82.6
1					87.4
0					91.0
	0	1	2	3	4
先物価格					

同時点で先物価格の可能性が5つある。

4					68.4
3					76.3
2					82.6
1					87.4
0					91.0
	0	1	2	3	4
先物価格					

には、どのような数字が入るか？

$$F_{t+\tau} = F_{t+\tau-1} \quad (2.6)$$

を利用すると可能性として、68.4 と 76.3 がある。どちらか？

A、どちらでもない

では、どのような数が入るか？

68.4 と 76.3 の期待値！！

$$\frac{1}{2} \times 68.4 + \frac{1}{2} \times 76.3 = 72.3$$

どちらになる可能性もあるので、期待値をとる必要がある。

4					68.4
3				72.33	76.3
2					82.6
1					87.4
0					91.0
	0	1	2	3	4
先物価格					

以上のやり方で全ての先物価格を算出すると、以下のようになる。

4					68.40
3				72.33	76.30
2			75.88	79.43	82.60
1		79.05	82.21	85.00	87.40
0	81.85	84.66	87.11	89.22	91.00
	0	1	2	3	4
先物価格					

先渡し：82.10 先物：81.85

$82.10 - 81.85 = 0.15$ の差が出る。つまり、不確実性を導入すると先物価格と先渡し価格は一致しなくなる。

[結論]

不確実性が導入されていないモデルであれば先物を用いることで、リスクをコントロールできたが、不確実性を導入すると運用に誤差が生じてきてしまう。つまり金利リスクをうまくコントロールできない場合も発生するということである。

この差を微々たるものと考え先物と先渡しの同値関係は成立すると考える投資家は(2.4)の式、つまり保有コストモデルを使って先物価格を算出する。

一方、機関投資家のように大金をかけて運用する投資家にとってはこの差は無視できない。よって、より精密に短期金利の変動の確率や上昇率、下降率を求めて、先物価格の値付けをしていく必要がある。

2.5.5 金利リスクの制御：金利オプションの場合

短期金利が変動する場合リスクのコントロールが難しくなることは確認した。

そして、その債券にオプションが付与されている場合はさらにリスクのコントロールが難しくなる。

オプションについては 1 章と 3 章で具体的に確認するので、詳しい説明は省略するがオプションとは予め定められた価格で債券を売却したり、購入したりする権利のこと。

ではなぜ、このオプションが債券に付与されているとリスクのコントロールが難しくなるのか？

例を使って確認する！

Ex)

- 企業は 10 年後に 1 億円返す約束で、銀行から $\frac{1}{(1+R)^{10}}$ 億円借り入れるとする。
- このローンにはコールオプション（ローンを早期返済できる権利）がついている。
- R =固定金利（年率）、 R にはオプションプレミアム分が含まれている。

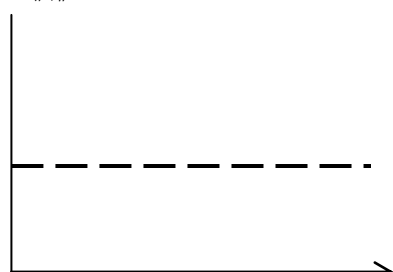
今、借り入れてから 3 年がたち、残存期間 7 年となった。

[固定金利 R の場合]

金利が R に固定されているので、
ローンの価値は一定

$$\frac{1}{(1+R)^7}$$

ローンの価値



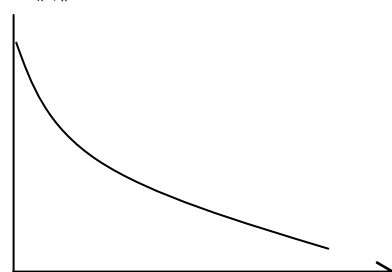
3年目における
7年物スポットレート

[7年物スポットレートの場合]

7年物スポットレートで1億を借り入れた場合

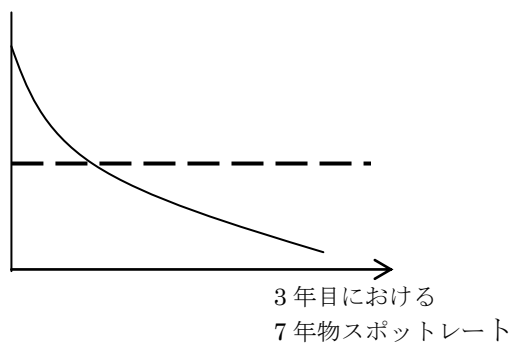
$$\frac{1}{(1+s_{3,7})^7}$$

ローンの価値



3年目における
7年物スポットレート

ローンの価値



$$\frac{1}{(1+s_{3,7})^7} > \frac{1}{(1+R)^7}$$

$$\frac{1}{(1+s_{3,7})^7} - \frac{1}{(1+R)^7} > 0$$

つまり $s_{3,7} < R$ ならば借り換え
の方がよい！

具体的な数値を入れれば分かりやすい！

企業 A は 10 年後に 1 億を返す約束で 6% の固定金利で借り入れた。

現在 3 年たち、残存期間 7 年である。

ここで今 7 年物のスポットレートが 5% だったとしよう。

固定金利のローンを返済するには $\frac{1}{(1+0.06)^7} = 0.6650$

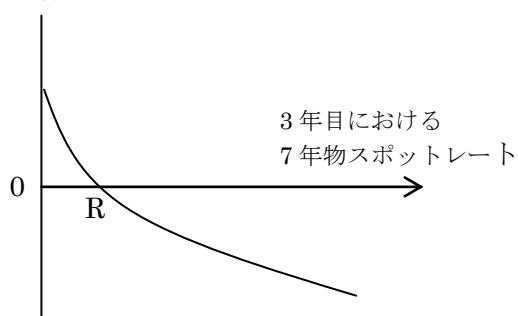
一方スポットレートで借り入れられれば、 $\frac{1}{(1+0.05)^7} = 0.7107$

よって固定金利のローンを返して、スポットレートで借り入れれば
 $0.7107 - 0.6650 = 0.0457$ (457 万円) の得になる！！

[早期返済の便益]

早期返済の利益を各スポットレートでプロットすると下図のようになる。

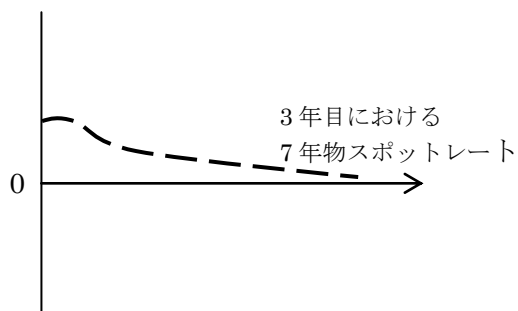
早期返済の便益



しかし、企業は早期返済を直ちにするととは限らない！なぜなら、将来もっと金利が下がる可能性があるからである。

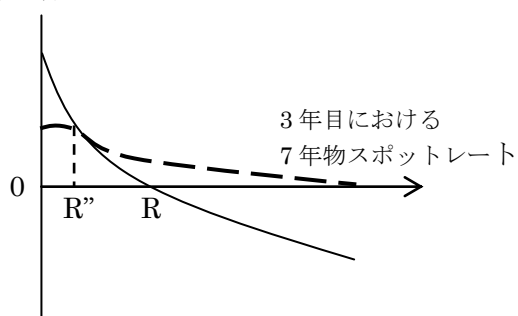
この早期返済を待つことによって生まれる経済的価値（ウェイティング・オプション）は計算することが出来る。そして、その経済的価値をスポットレートごとにプロットすると下図のようになる。

ウェイティング・オプションの価値



早期返済によって生まれる価値と早期返済をせずに待っている価値(ウェイティング・オプションの価値)を比べて、早期返済の価値の方が高ければ早期返済すべきである。

早期返済の便益



つまり、金利が R' より小さければ、早期返済するべきである！

[教科書 125P の図 2.10 より]

線分 CE は早期返済をすることで得られた便益

線分 ED' は早期返済を待つことによって発生する便益

どちらも返済負担を軽減する。

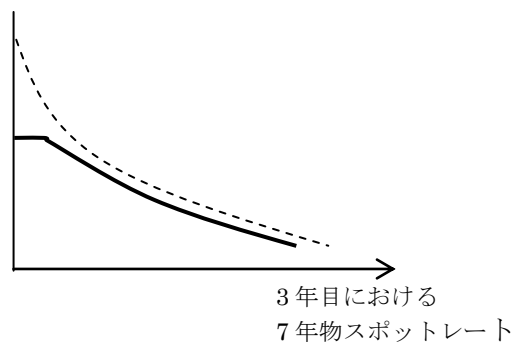
よってその負担軽減分を

7年物ローン契約の価値から引くと

3年目時点のローンの価値は

右のようになる。

ローンの価値



この図より、何が分かるか？

金利が低下するとデュレーションが極端に短縮化する。

よって、銀行側はオプションが付与されているとスポットレートの変化を絶えず気にしなければならないので、銀行側はリスクコントロールが難しくなる。

2.6 均衡理論と金利決定 (P127)

今まではスポットレートは与えられているものとして考えるか、短期金利の変動から二項格子を使い算出するかのどちらかであった。

2.6 ではもう少し精密にスポットレートを求めていく。

スポットレートに影響を与えるもの

- ①時間選好率
- ②インフレーション
- ③将来の経済水準
- ④将来の経済変動

EX)1 年先に 100 円の元本が償還される割引債価格 P を導出することで、上の 4 つの影響を分析する(④は今の時点では気にしない)

①時間選好説 $(1 + \rho)$	②インフレーション $(1 + \frac{\Delta p}{p})$	③将来の経済水準 $(\frac{c + \Delta c}{c})^\gamma$
------------------------	---	---

③は国民全体の総消費がどれだけ変化したかを表す。

これが一番消費者の経済水準に関わりが深いから（つまり指標は経済水準を測るモノなら何でも良い）。

（利率 ρ や指数 γ は計量経済学手法を使い、データから算出する。）

これら①②③より

$$P = \frac{100}{(1 + \rho) \times (1 + \frac{\Delta p}{p}) \times (\frac{c + \Delta c}{c})^\gamma} \quad (1)$$

$$(1 + \rho) \times \left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right) \times \left(\frac{c + \Delta c}{c}\right)^\gamma = s_{1,1} \text{ (1 年物のスポットレート)}$$

(2.1.4)で確認したスポットレートの近似式を使う

$$s_{t,N} = \frac{\ln B - \ln P}{N} \quad (2)$$

今回のスポットレートは $s_{1,1}$ なので

$$s_{1,1} = \frac{\ln B - \ln P}{1} = \ln B - \ln P \quad (3)$$

対数の性質より

$$\log a M - \log a N = \log a M/N \quad (4)$$

(4)より(3)は

$$s_{1,1} = \ln \frac{B}{P} \quad (5)$$

$$B=\text{額面なので } 100, (1) \text{より } P = \frac{100}{(1+\rho) \times (1+\frac{\Delta p}{p}) \times (\frac{c+\Delta c}{c})^\gamma}$$

それぞれを(5)に代入して、

$$s_{1,1} = \ln \frac{B}{P} = \ln \frac{100}{\frac{100}{(1+\rho) \times (1+\frac{\Delta p}{p}) \times (\frac{c+\Delta c}{c})^\gamma}} = \ln(1+\rho) \times (1+\frac{\Delta p}{p}) \times (\frac{c+\Delta c}{c})^\gamma \quad (6)$$

対数の性質より

$$\log a M N = \log a M + \log a N \quad (7)$$

(7)より(6)は

$$\ln(1+\rho) + \ln(1+\frac{\Delta p}{p}) + \ln(\frac{c+\Delta c}{c})^\gamma \quad (8)$$

さらに s が十分に小さいときには

$$\ln(1+s) \approx s \quad (9) \quad (\approx \text{は} \asymp \text{と同じ意味。} \asymp \text{は日本でしか使われていない})$$

という対数の性質を活かして、(8)の式を書き直すと

$$s_{1,1} = \ln(1+\rho) + \gamma \ln(\frac{c+\Delta c}{c}) + \ln(1+\frac{\Delta p}{p}) \approx \rho + \gamma \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta p}{p} \quad (2.8)$$

(2.8)によってスポットレートが簡単に求められる。

教科書では $\ln \frac{100}{P} = \ln(1+\rho) + \gamma \ln(\frac{c+\Delta c}{c}) + \ln(1+\frac{\Delta p}{p})$ しか書かれていないが以上のような計

算過程がある。

④の経済変動を組み込む場合

ということか？

将来の経済状況に上がる場合と下がる場合を考えて確率を組み込むということ。

Ex)

現在の消費水準が c 、1 年後に $c + \Delta$ になっている確率が π 、1 年後に $c - \Delta$ になっている確率が $(1 - \pi)$ だとすると

$$P = \frac{100}{(1 + \rho) \times (1 + \frac{\Delta p}{p}) \times (\frac{c + \Delta}{c})^\gamma} \pi + \frac{100}{(1 + \rho) \times (1 + \frac{\Delta p}{p}) \times (\frac{c - \Delta}{c})^\gamma} (1 - \pi) \quad (1)$$

展開すると(教科書には既に展開した状態で書かれている)

$$P = \frac{100 \times (\frac{c}{c + \Delta})^\gamma}{(1 + \rho) \times (1 + \frac{\Delta p}{p}) \times (\frac{c + \Delta}{c})^\gamma \times (\frac{c}{c + \Delta})^\gamma} \pi + \frac{100 \times (\frac{c}{c - \Delta})^\gamma}{(1 + \rho) \times (1 + \frac{\Delta p}{p}) \times (\frac{c - \Delta}{c})^\gamma \times (\frac{c}{c - \Delta})^\gamma} (1 - \pi) \quad (2)$$

これを先ほどと同様に近似式でスポットレートを求めると以下ようになる。

$$s_{1,1} \approx \rho + (2\pi - 1) \frac{\Delta}{c} - \left(\frac{\Delta}{c}\right)^2 + \frac{\Delta p}{p} \quad (2.9)$$

(2.8)の式は Δ が大きいほどスポットレートが大きくなるのに対し、(2.9)は Δ が大きいとスポットレートが下がる。

この違いは投資家の上昇と下降の確率に対する選好によって生まれる。

つまり、変化が大きいと投資家が考えた場合、投資家は金利を小さく評価する。

最後に 2 年の消費水準が教科書 P 131 のように推移する場合の各スポットレートを求めてみる。

仮定：インフレは起きない、 $\gamma = 1$ 、確率は 0.5

1 年物のスポットレートは、経済水準も変化しないので ρ

先ほどの展開とどのように進めると、2 年物スポットレートは

$$s_{2,2} \approx \rho - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{c}\right)^2 \quad (1)$$

この 2 年物スポットレート、1 年物スポットレートを使って 1 年先の 1 年物フォワードレートを求めると

$$\rho - \left(\frac{\Delta}{c}\right)^2 \quad (2)$$

になる。

一方、1年先の1年物スポットレートを求めると、

$$\text{上昇する場合} : \rho + \left(\frac{\Delta}{c}\right) \quad (3)$$

$$\text{下降する場合} : \rho - \left(\frac{\Delta}{c}\right) \quad (4)$$

となり、スポットレートの期待値は

$$\frac{1}{2} \left(\rho + \frac{\Delta}{c} \right) + \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{\Delta}{c} \right) = \rho \quad (5)$$

つまり現時点から期待されるフォワードレートとスポットレートが一致しない。

算出仮定において確率の違いや投資家の選好によってズレが生じてくるから。