2010/01/14
冬サブゼミ
ＢＳモデル

ブラック･ショールズの偏微分方程式

伊藤の公式を利用すると確率微分方程式を解くことができる。
株式を微分方程式であらわした以下の式、

$$\frac{dX}{X} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dB_t$$

両辺にＸをかけると

$$dX = \mu X \cdot dt + \sigma X \cdot dB_t$$

μ ：期待収益率
σ ：分散
Ｘ：株価
B_t：ブラウン運動

ＸをＳₜに置きかえると、

$$dS_t = \mu S_t \cdot dt + \sigma S_t \cdot dB_t$$

S_tの関数$x_t = logS_t$を考えて伊藤の公式を適用すると、

$$dx_t = \left\{ \frac{\partial(1ogS_t)}{\partial S}\mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(1ogS_t)}{\partial {S_t}^2}\sigma S_t \right\} dt + \frac{\partial(1ogS_t)}{\partial S_t}\sigma S_t dB_t$$

$$= \left\{ \frac{1}{S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{{S_t}^2}\right)(\sigma S_t)^2 \right\} dt + \frac{1}{S_t}\sigma S_t dB_t$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t$$

よってx_tは定数係数の確率微分方程式を満たす。これを解くと

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) = \alpha \quad \text{と置くと、}$$

$$dx_t = x_{t+dt} - x_t$$

$$dB_t = B_{t+dt} - B_t$$

$$x_{t+dt} - x_t = \mu d\ t + \sigma(B_{t+dt} - B_t) \cdot\cdot\cdot ③$$

③式に t=0,dt,2dt…,t-dt を順に代入すると

$$x_{dt} - x_0 = \alpha d\ t + \sigma(B_{dt} - B_0)$$

$$x_{2dt} - x_{dt} = \alpha d\ t + \sigma(B_{2dt} - B_0)$$

・

・

・

$$x_t - x_{t-dt} = \alpha d\ t + \sigma(B_t - B_{t-dt})$$

これらをすべて足し合わせて$B_0=0$に注意すると

$$x_t - x_0 = \alpha\ t + \sigma B_t$$

つまり

$$x_t = x_0 + \alpha\ t + \sigma B_t$$

ここでαを$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$に戻す。

$$x_t = x_0 + \left\{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right\}dt + \sigma dB_t$$

となる。ここで、$S_t = exp(x_t)$であることを用いると

$$S_t = S_0 exp\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\}$$

この式は離散モデルで導いた株価を表す式、$Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}N(0,1)}$に非常に似ていますね！ほぼ意味は一緒です。

今度は伊藤の公式の定数 a, b を S と t の関数である$a(t,S_t)\Delta t$と$b(t,S_t)$に置く事により株価をあらわす。

$$dS_t = a(t,S_t)dt + b(t,S_t)\Delta B_t$$ ・・・確率微分方程式（①式）

関数$f(t,S_t)$を考えることによりオプション価格にする

微小時間⊿t における$f(t,S_t)$の変化⊿f はテイラー展開により次式となる

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}dt + \frac{\partial f}{\partial S_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s_t^2}(dS_t)^2 + \cdots$$

$$= \frac{\partial f}{\partial S}dt + \frac{\partial f}{\partial S_t}adt + bdB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s_t^2}(a^2dt^2 + 2ab\,dt\,dB_t + b^2 d{B_t}^2)\cdots$$ ・・・②式

$$E[(d{B_t}^2)] = E[(d{B_t}^2)] - E[(d{B_t}^2)]^2$$
$$= V[(dB_t)] = dt$$

dt の１次までの項を取って、①式を整理すると

$$df = \left\{\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t}\underbrace{a(t,S_t)}_{\mu\,(\text{収益率})} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {S_t}^2}\cdot\underbrace{(b(t,S_t))^2}_{\sigma\,(\text{分散})}\right\}dt + \frac{\partial f}{\partial S_t}\underbrace{b(t,S_t)}_{\sigma\,(\text{分散})}dB_t$$

2010/01/14
冬サブゼミ
ＢＳモデル

ここで株価Ｓの株式を$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{S}}$単位、価格ｆ（S,t）のオプションを１単位売るポートフォリオを作る

今、伊藤の公式から$df=\left\{\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{\partial f}{\partial t\mu}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {S_t}^2}\sigma\right\}dt+\frac{\partial f}{\partial S_t}b\sigma B_t$　を得たが、２項目のB_tに不確実性があるため、このままでは解けない

そこで、このB_tを消すために連立方程式を立てる、ためにポートフォリオを考える！

このポートフォリオの価値は

$$\underbrace{\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{S}}\cdot \mathrm{S}}_{\boxed{\text{株式}}}-\underbrace{1\cdot \mathrm{f}\ (\mathrm{S},\mathrm{t})}_{\boxed{\text{オプション}}}$$

で表される。したがって、⊿ｔ時間でのポートフォリオの変化量

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{S}}\cdot \Delta \mathrm{S}-1\cdot \Delta \mathrm{f}\ (\mathrm{S},\mathrm{t})$$

である。

$$\begin{cases}\Delta \mathrm{S}=\mu \mathrm{S}\Delta \mathrm{t}+\sigma \mathrm{S}\Delta \mathrm{Z}\\ \Delta \mathrm{f}=\left\{\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{S}}\mu \mathrm{S}+\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{S}^2}\sigma^2 \mathrm{S}^2\right\}\Delta \mathrm{t}+\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{S}}\sigma \mathrm{S}\Delta \mathrm{Z}\end{cases}$$

を代入すると

$$\frac{\partial f}{\partial S}\cdot\Delta S-1\cdot\Delta f$$

$$=\frac{\partial f}{\partial S}\{\mu S\Delta t+\sigma S\Delta Z\}-\left\{\frac{\partial f}{\partial S}\mu S+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right\}\Delta t-\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta Z$$

$$=\left\{-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right\}\Delta t$$

となる。

　したがって

$$\frac{\partial f}{\partial S}\cdot\Delta S-1\cdot\Delta f=\left\{-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right\}\Delta t$$

となる。

この右辺 $\left\{-\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{S}^2}\,\sigma^2 \mathrm{S}^2\right\}\triangle\mathrm{t}$ の中は⊿Z がなくなるので、⊿t の時間の間リスクがなくなっている。

そこでリスクフリーレートを r とすれば

$$\frac{\partial f}{\partial S}\ \cdot\Delta S-\Delta f=r\left\{\frac{\partial f}{\partial S}\ \cdot S-1\ f(S,t)\right\}\cdot\Delta t$$

となる。したがって

$$\left\{-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right\}\Delta t=r\left\{\frac{\partial f}{\partial S}\ \cdot S-1f(S,t)\right\}\cdot\Delta t$$

となり、両辺から⊿t をとると

$$-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2=r\left\{\frac{\partial f}{\partial S}\ \cdot S-1f(S,t)\right\}$$

かっこをはずすと

$$-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2=r\frac{\partial f}{\partial S}S-rf(S,t)$$

これを変形させると

$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial S^2}\,\sigma^2 \mathrm{S}^2+\mathrm{r}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{S}}\mathrm{S}=\mathrm{rf}(\mathrm{S},\mathrm{t})$・・・ブラック･ショールズの偏微分方程式が導かれる。