B 班　神谷・長村

第２３章　政府債券の評価

本章の目的：なぜ、金利の期間構造が存在しているのだろうか。
＝金利の一般的な水準が、時間が経つにつれて変化していくのはなぜか。
という問題について解き明かす。

23.1 実質金利と名目金利

第 3 章の復習
・実質金利：インフレ率を考慮している金利
・名目金利：インフレ率を考慮していない金利

（例）4%の期待インフレ率、10%の一年債の期待実質収益率

$$\frac{1.10}{1.04} - 1 = 0.058$$

よって、5.8%であることがわかる。

しかし、将来のインフレ率は不確実なものなので、債券の実質金利も不確実である。

実質収益率を確定することができる、インデックス債(indexed bond)がある。

インデックス債：元利払いがインフレーションに連動している債券のことである。

ここでは、アメリカ財務省が発行している、TIPs を用いて説明する。
（財務相インフレ連動証券：Treasury Inflation – Protected Securities）

TIPs のキャッシュフロー
- 実質ベースで固定されている。
- 名目ベースでは、消費者物価指数の上昇に従う。

（例）米国財務省が$100、クーポンレート 3%の 20 年物の TIPs を発行しているとする。
そして、第 1 年目に、消費者物価指数が 10%上昇したとすると、
クーポンの支払いも同じ割合で増加して、1.1×3 = 3.3%となる。
元本の最終的な支払いも同じ割合で増加して、1.1×100 = 110%となる。

債券を発行価格で購入し、満期まで保有する投資家には**3%**の実質利回り
（実質収益率）が保証される。

仮に、長期 TIPs が 2.2%の利回りを提供しているとする。
名目金利払いの財務省証券の金利が 5%だとする。
上記と同じ例で 2 つに場合分けをして考えて見る。

（ｉ）インフレ率が年率で 2.8%よりも高くなった時
→TIPs の保有によって、高い収益を上げることができる。

（ⅱ）インフレ率が年率で 2.8%を下回った時
→財務省証券の保有よりも低い収益となる。

投資家が求める実質金利は何によって決まるのだろうか？
Irving Fisher のフィッシャー効果
→金利とインフレ率の関係を説明している

（例）リンゴ

			リンゴの価格が 1 年で 10%増加する
今	100 コ	満足	$100
	↓		↓
一年後	105 コ		$115
	➠利子率 5%		

名目、つまり「貨幣」利子率は、必要とされている実質あるいは「リンゴ」利子率に予想インフレ率を加えたものと等しい。

期待インフレ率が 1%変化すると、名目金利も 1%変化する。
しかし実質金利は変化しない
↓
フィッシャー効果

実際の金利はフィッシャーによってどの程度説明できるのか？
→ほとんどの金利はインフレ率をわずかに上回っている
＝フィッシャー効果により大まかには説明できている

23.2 金利の期間構造と満期利回り

○スポットレート

（例）第 1 期に$1 の支払いが行われる単純な負債。この負債の現在価値は

$$\mathrm{PV} = \frac{1}{1 + \mathrm{r}_1}$$

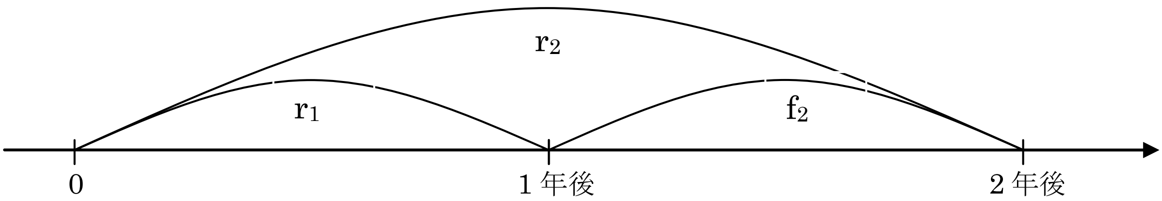
ここで、r_1は 1 期間のスポットレート(spot rate)と呼ばれる。

第 2 期にも$1 の支払いが行われる負債があるとすると、その現在価値は

$$\mathrm{PV} = \frac{1}{1 + \mathrm{r}_1} + \frac{1}{(1 + \mathrm{r}_2)^2}$$

・スポットレート：現在から将来のある時点までの割引債の金利。

・フォーワードレート：将来のある時点から、さらに将来のある時点までの利回り。



○満期利回り

上の式ではr_1 ,r_2には異なった数値を仮定しているが、各期の割引率を同じにすることもできる。

そのような金利を、満期利回り(yield to maturity)と呼ぶ。

※満期利回り＝内部収益率

満期利回りを y とすると、現在価値は

$$\mathrm{PV} = \frac{1}{1 + \mathrm{y}} + \frac{1}{(1 + \mathrm{y})^2}$$

y を求めるために必要な値

・債券の価格

・債券の毎期の支払額

・債券の満期

（例）

債券	額面	満期	クーポンレート	価格	満期利回り
A	$1,000	2016 年	5%	$852.11	8.78%
B			10%	$1,054.29	8.62%

債券	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	利回り
A	−852.11	50	50	50	50	1050	8.78%
B	−1,054.29	100	100	100	100	1100	8.62%

→なぜＡの方が、利回りが高くなるのだろうか？？
そこで、スポットレートの概念を用いて考えてみる。

期　間 (t)	金　利 (r_t)	債権ＡのＣＦ(Ct)	r_t で割り引いた債権ＡのＰＶ	債権ＢのＣＦ(C_t)	r_t で割り引いた債権ＢのＰＶ
1	0.05	50	47.62	100	95.24
2	0.06	50	44.5	100	89.00
3	0.07	50	40.81	100	81.63
4	0.08	50	36.75	100	73.50
5	0.09	1,050	682.43	1,100	714.92
		合計	$852.11		1,054.29

※重要な前提条件として、長期金利＞短期金利という仮定がある。

なぜ債権Ａの方が高い利回りとなるのか？
→債権Ａの方が相対的に長期に比重が大きいため。

債権 A			
クーポン	割合	CF の PV	割合
50	4.00%	47.62	5.59%
50	4.00%	44.5	5.22%
50	4.00%	40.81	4.79%
50	4.00%	36.75	4.31%
1,050	84.00%	682.43	80.09%
1250	100.00%	852.11	100.00%

債権 B			
クーポン	割合	CF の PV	割合
100	6.67%	95.24	9.03%
100	6.67%	89.00	8.44%
100	6.67%	81.63	7.74%
100	6.67%	73.50	6.97%
1,100	73.33%	714.92	67.81%
1500	100.00%	1,054.29	100.00%

満期利回り→債権のすべての支払いは同じ金利で割り引かれている。

$$\mathrm{PV} = \frac{1}{1+\mathrm{y}} + \frac{1}{(1+\mathrm{y})^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\mathrm{y})^\mathrm{n}}$$

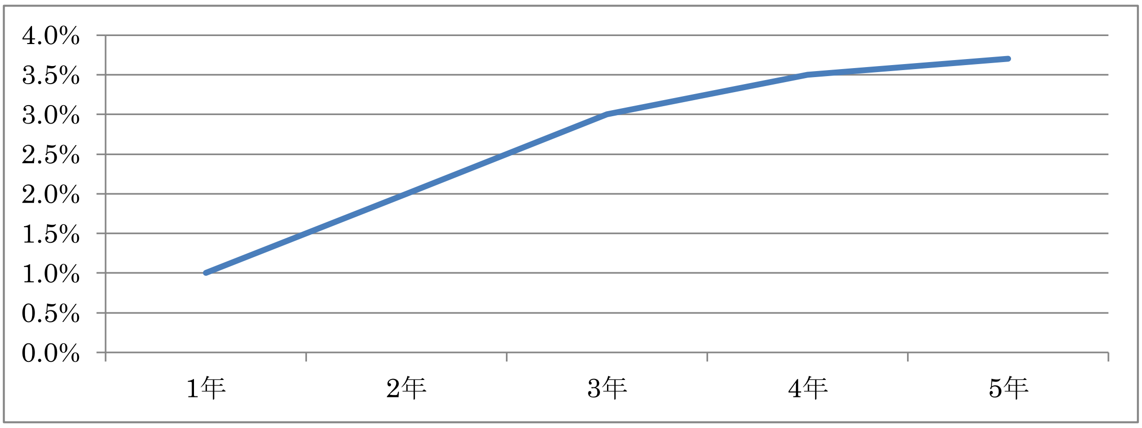
スポットレート→異なった時期に生じる CF には異なった収益率で割り引く。

$$\mathrm{PV} = \frac{1}{1+\mathrm{r}_1} + \frac{1}{(1+\mathrm{r}_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\mathrm{r}_\mathrm{n})^\mathrm{n}}$$

○スポットレートの計測

ストリップ債(stripped bond)を用いて、スポットレートの計測を行う。

ストリップ債：将来の支払いがただ 1 回だけとなっている債権



2004 年において、10 年物のストリップ債の価格は$647.02 で 10 年後に$1,000 の支払いが行われる。この、10 年物のスポットレートは、

$$\left(\frac{1{,}000}{647.02}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 = 0.0445$$

よって、4.45%だとわかる。

23.3 金利の変動が債権価格に及ぼす影響

	標準偏差
財務省証券	2.8%
長期国債	8.2%

長期債の価格は、短期債に比べて、
金利の変動に敏感である。

ここで、10 年物の利付債の場合、毎年利払い（クーポンの支払い）が行われるため、債権に投資した資金の平均回収期間は 10 年に満たないことがわかる。

○デュレーション

デュレーション：①債券投資の平均回収期間

②金利変動に対する債券価格の感応度

（例）満期４年で、クーポンレート 5.5%(支払いは年２回)の利付債。

額面$1,000、価格$1,102.8

年	CF	割引率 2.75%での現在価値	CF の PV が全体に占める割合	割合×年
1	55	53.53	0.049	0.049
2	55	52.10	0.047	0.094
3	55	50.70	0.046	0.138
4	1,055	946.51	0.858	3.433
	合計	1102.834266	1	3.714

デュレーション＝3.714 年

債権の全体の現在価値を V とすると、

$$\text{デュレーション} = \left[\frac{1 \times PV(C_1)}{V}\right] + \left[\frac{2 \times PV(C_2)}{V}\right] + \cdots + \left[\frac{n \times PV(C_n)}{V}\right]$$

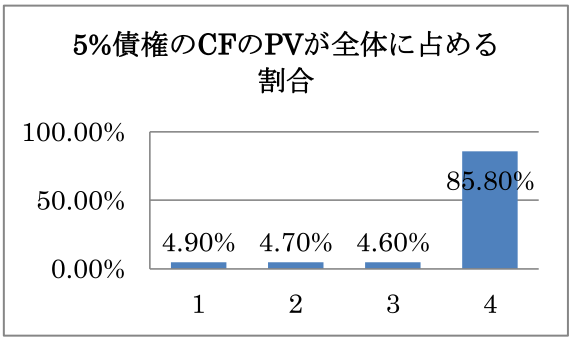
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} i \times PV(C_i)}{V}$$

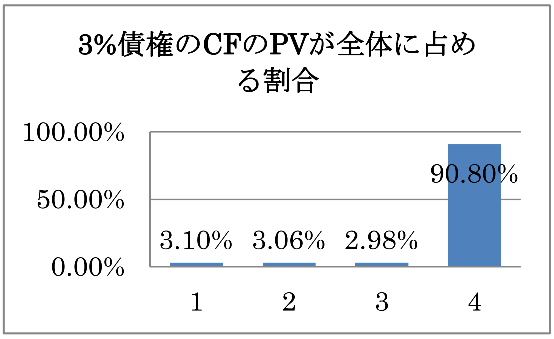
これに、上の数値をあてはめると、

$$\text{デュレーション} = \frac{1 \times 53.53 + 2 \times 52.10 + 3 \times 50.70 + 4 \times 946.51}{1{,}102.83} = 3.714\text{年}$$

次に、クーポンレート 3%、その他の条件は全て同じ債券について考えてみると、デュレーションは 3.830 年であることがわかる。

5%の債権のデュレーション＜3%の債権のデュレーションとなるのはなぜか？？





⇒5%債権の方が、クーポンの支払いが債権価値の中で占める割合が高いから。

	5%		3%	
	価格	変化率	価格	変化率
利回りが 0.5%低下	$1,123.00	1.83%	$1,028.39	1.89%
利回りが 0.5%上昇	$1,083.14	−1.79%	$990.76	−1.84%
差		3.61%		3.73%

5%の債権の場合、利回りが 1%変化したとき、価格は 3.61%変化する。
この時の、3.61%をボラティリティという。

5%のボラティリティ＝3.61%＜3%のボラティリティ＝3.73%

よって、3%の債権の方が、変動率が大きい。
このボラティリティは調整デュレーションともいう。

$$\text{ボラティリティ}(\%) = \frac{\text{デュレーション}}{1 + \text{利回り}}$$

$$\text{ボラティリティ}(\%) = \frac{3.714}{1.0275} = 3.61\%$$

○1 ファクター・モデル
「5%の債権の場合、金利が 1%変化すると、債権価格には、3.61%の変化が生じる」
このことを式に表すと、

債権価格の変化＝3.61×金利の変化

この関係性を、債権の収益に関する 1 ファクター・モデルと呼ぶこともある。
→金利の変化という 1 つのファクターによって、債権の価格が決定するため。

仮に、1 ファクター・モデルが完全に正しいとする。

↓

財務省証券の利回りが正確に同一歩調で変動する。

↓

個々の債権の価格変動は、そのデュレーションに完全に比例する。

しかし！

短期金利と長期金利が完全に一斉に変動するということは必ずしも起こり得ない。

↓

1 ファクター・モデルで、全てを説明できるとは言い難い。

23.4 期間構造の説明

そもそも、なぜ短期金利＜長期金利となり、時にはその逆にもなり得るのだろうか？？

（例）2004 年 2 月の 1 年物のスポットレート(r_1)=約 1.2%

2 年物のスポットレート(r_2)=約 1.8%

$1 投資するごとに、その$1 は 1 年間で、

$$\$1\times(1+r_1)=\$1.012$$

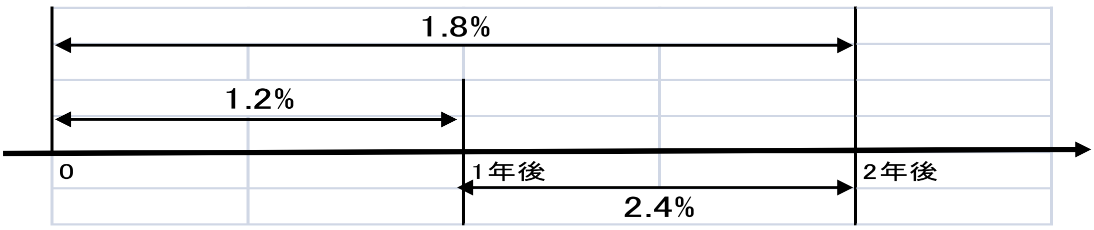
2 年間投資できるのであれば、

$$\$1\times(1+r_2)^2=\$1.018^2=\$1.0363$$

1 年間投資の年数を増やすことによって、

$1.012→$1.0363　つまり 2.4%の増加

この 2.4%は先渡し金利(forward interest rate)と呼ばれる。



2 年目に得ることができる、追加的な利回りを f_2 とすると、

$$(1+f_2)=\frac{(1+r_2)^2}{(1+r_1)}\Leftrightarrow(1+r_1)(1+f_2)=(1+r_2)^2$$

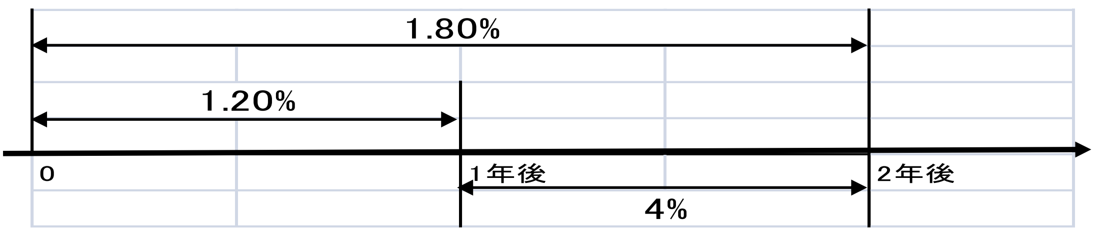
$$f_2=\frac{(1.018)^2}{1.012}-1=0.024\text{ よって }2.4\%$$

○期待理論

仮に、今後金利が間違いなく上昇して、1 年間で 1 年物の金利が 4%になると、わかっているとする。

↓

2 年物に投資をして、2.4%の追加分では損となるから、皆 1 年物に投資、満期が来たら再投資を行う。

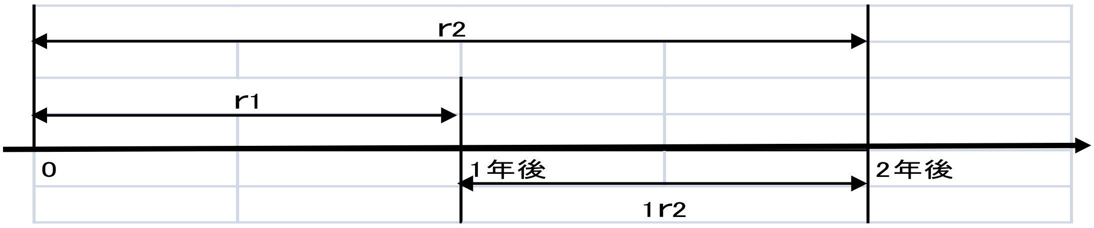


2 年物の価格が下落する。

↓

2 年物保有によって得られる収益が、
1 年物に 2 度投した時と同じになった時、下落が止まる。（＝裁定取引）

1 年物に再投資を行った際、2 年目の終わりに期待できる金利を ${}_1r_2$ とする。



この時、

1 年物に 2 年間投資をした場合の収益率
‖
2 年物に投資をした場合の収益率

⇒期待理論(expectations theory)、純粋期待仮説とも言う。

この理論が成り立つことにより、初めて「${}_1r_2 = f_2$」ということができる。

この理論によると、

・短期債の金利＜長期債の金利となる唯一の理由
　→投資家が短期金利の上昇を予想

・短期債の金利＞長期債の金利となる唯一の理由
　→投資家が短期金利の下落を予想

しかし、期待理論だけでは、期間構造を完全に説明できない。
→期待理論には以下のような前提条件があるから。

・取引コストや税金がなく、完全に裁定関係が成り立っている。
・リスクの無視

〇流動性選好理論

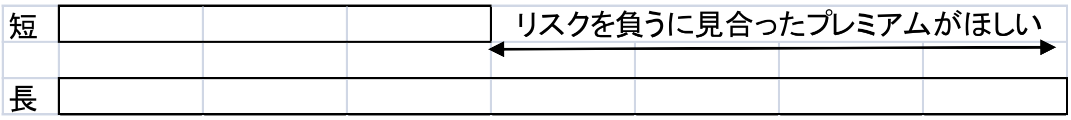
　将来予測が不確かな時、つまり将来のリスクを考慮に入れた時には、低い期待収益率でもそちらを選択することが考えられる。

デュレーションの長い債権のボラティリティ

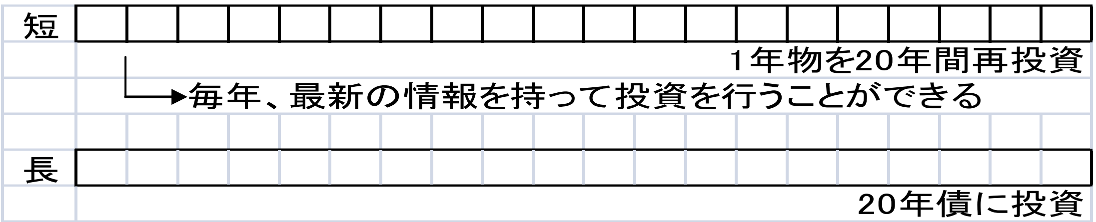
＞デュレーションの短い債権のボラティリティ

→デュレーションが長いほうが、リスクが上乗せされる。

以下の図はデュレーションの長さを表している。



・インフレーションの導入



→長期の投資を行うには、何らかのインセンティブが必要→プレミアム

○債権から得られる収益率の関係

満期の異なる債権の収益率が一緒に変動する傾向がある。

・短期金利が高くなる→長期金利も高くなる。

・短期金利が低くなる→長期金利も低くなる。

		価値の変化		
	当初の価格	金利が上昇した場合	金利が低下した場合	変化後の価格
財務省証券	98	＋2	＋2	100
中期債	?	−6.5	＋10	?
長期債	105	−15	＋18	90 あるいは 123

$100 で投資を行う時、財務省証券と長期債に半分ずつ投資するとする。

ポートフォリオの価格変化は

金利上昇・・・(0.5×2)+[0.5×(−15)]=−$6.5

金利低下・・・(0.5×2)+(0.5×18)=$10

→中期債と同じペイオフ

よって中期債の価格は財務省証券と長期債の中間で

$$\frac{(98+105)}{2}=101.5$$ とわかる。

さらに金利の変化後の価格は

金利上昇時・・・101.5－6.5=95

金利低下時・・・101.5－10=111.5

この例で言いたかった事

(1)投資家は債権価格の変化、その連関に注目している。

(2)債権価格は少数のファクターと関係している。

(3)さまざまな債権の価格間の関連が定まれば、それ以外の債権との関係で価格付けできる。